Correction du dev n°5 - Tspé

Ex1 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\[2mm] \dfrac{2x-1}{3x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

* f continue sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ comme composée et quotients de fonctions continues 0,5

* en 1 : $f(1) = \dfrac{2-1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

pour $x > 1$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \times \dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$

1/3

$$= \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{4} = f(1)$ Par composée, somme et quotient

2

f est donc continue en 1

0,5

* Alors f est continue sur $[0;+\infty[$

Ex2 : $f(x) = \begin{cases} x^2-3x-2 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1/3

* f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$ comme fonctions usuelles dérivables 0,5

* en 1

pour $x \leq 1$ $(x^2-3x-2)' = 2x-3$

donc la dérivée à gauche de 1 est (-1) $(2-3)$

pour $x > 1$ $\tau_1(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\frac{x-5}{x}-(-4)}{x-1}$

$f(1) = 1-3-2 = -4$

$$= \frac{(x-5)+4x}{x(x-1)} = \frac{5x-5}{x(x-1)} = \frac{5}{x}$$ 2

$\lim\limits_{x \to 1} \tau_1(x) = 5$ $5 \neq -1$

donc f n'est pas dérivable en 1

0,5

f n'est donc pas dérivable sur $\mathbb{R}$

Ex 3 : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$ 17

1) il semble que (u_n) soit décroissante et converge vers 1. 0,5

2) $f'(x) = \dfrac{2(x+4)-(2x+3)\times 1}{(x+4)^2} = \dfrac{5}{(x+4)^2}$ $5>0$ $(x+4)^2>0$ 1,5

donc $f'(x)>0$ alors f strictement croissante sur $]-4;+\infty[$

3) on veut mq $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

- initialisation : pour $n=0$
$u_0 = 5$ $u_1 = \frac{13}{9}$ on a $1 \leq \frac{13}{9} \leq 5$ vrai pour $n=0$
soit $1 \leq u_1 \leq u_0$ 0,5

- hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$
f strictement croissante sur $]-4;+\infty[$
donc sur $[1;+\infty[$ 1,5
alors $f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$ avec $f(1) = \frac{5}{5} = 1$
donc $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ vrai pour k+1

- Conclusion : c'est vrai pour $n=0$ et c'est héréditaire
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ 0,5

4) (u_n) est donc décroissante et minorée par 1
par théorème (u_n) converge vers l. 0,75

f continue sur $]-4;+\infty[$ comme fonction rationnelle
d'après le théorème du point fixe
l vérifie $l = f(l)$. 0,75

$x = f(x) \iff x = \dfrac{2x+3}{x+4} \iff x^2+4x = 2x+3 \iff x^2+2x-3=0$
or $l \geq 1$ $\iff (x-1)(x+3)=0$
$\iff x=1$ ou $x=-3$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ 1

Ex 4 : (A) $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ sur $\mathbb{R}$

du signe de a à l'extérieur des racines

1) $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x+1)(2x-1)$

0,5

g est un polynôme

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$

0,75

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$ $a=3$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘	-9	↗	$+\infty$

1

2) sur $]-\infty ; -1/2]$, -7 est le maximum que $g(x)$ atteint en $x = \frac{-1}{2}$ donc $g(x) < 0$

0,5 l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution

sur $[1/2 ; +\infty[$ g est continue comme polynôme

g strictement croissante

$g(1/2) = -9$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$0 \in [-9 ; +\infty[$

1 D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[1/2 ; +\infty[$

0,25 Au total une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

D'après la calculatrice

0,5

$g(1,45) < 0$

$g(1,46) > 0$

donc $1,45 < \alpha < 1,46$

3) D'après la question précédente

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

0,5

(B) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$ sur $]1/2 ; +\infty[$

1) (a) f est une fonction rationnelle

0,75

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{4x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{x \to 1/2} x^3 + 1 = 9/8$

$\lim\limits_{x \to 1/2^+} 4x^2 - 1 = 0^+$ (tableau en (A) 1)

Par quotient $\lim\limits_{x \to 1/2^+} f(x) = +\infty$

1,25

La droite d'équation $x = 1/2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

2) $f=\frac{u}{v}$ $\quad f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

ⓐ $f'(x)=\frac{3x^2(4x^2-1)-(x^3+1)\times 8x}{(4x^2-1)^2}$

1,5 $\quad = \frac{12x^4-3x^2-8x^4-8x}{(4x^2-1)^2} = \frac{4x^4-3x^2-8x}{(4x^2-1)^2} = \frac{x\,g(x)}{(4x^2-1)^2}$

ⓑ sur $]1/2\,;+\infty[$, $x>0$, $(4x^2-1)^2>0$ 0,5

donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

x	$1/2$		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

0,5

ⓒ $\mathcal{D}: y=\frac{1}{4}x$

1) $f(x)-\frac{1}{4}x = \frac{x^3+1}{4x^2-1} - \frac{x}{4} = \frac{4(x^3+1)-x(4x^2-1)}{4(4x^2-1)} = \frac{x+4}{4(4x^2-1)}$

0,75

2) ⓐ sur $]1/2\,;+\infty[$ $\quad x+4>0$ et $4x^2-1>0$

0,75 donc $f(x)-\frac{1}{4}x>0$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$

ⓑ $M(x\,;f(x))$ $\quad MN^2=(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2$

$N(x\,;\frac{1}{4}x)$ $\quad = (f(x)-\frac{1}{4}x)^2$

1 or $f(x)-\frac{1}{4}x>0$ donc $MN = f(x)-\frac{1}{4}x = \frac{x+4}{4(4x^2-1)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+4}{4(4x^2-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{4\times 4x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{16x} = 0$

La distance MN tend vers 0 en $+\infty$: $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

ⓓ 1) $g(1)=-7$ $\quad$ on cherche $g(x)=0$ donc on balaye

$g(1)<0$ $\quad$ tant que $g(a)\times g(a+h)>0$

le prog 2 ne convient pas

1 dans le prog 3, « print » est dans la boucle.

c'est donc le prog 1 qui convient.

(b) $f(\alpha) - \frac{3}{8}\alpha = \frac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1} - \frac{3}{8}\alpha$

$= \frac{8(\alpha^3+1) - 3\alpha(4\alpha^2-1)}{8(4\alpha^2-1)}$

$= \frac{8\alpha^3+8-12\alpha^3+3\alpha}{8(4\alpha^2-1)}$

$= \frac{-4\alpha^3+3\alpha+8}{8(4\alpha^2-1)} = \frac{-g(\alpha)}{8(4\alpha^2-1)}$

$= 0$

donc $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$

$1{,}45 < \alpha < 1{,}46$

$\Leftrightarrow 0{,}54375 < f(\alpha) < 0{,}525$ donc $0{,}54 < f(\alpha) < 0{,}55$