Devoir n°4 - Calcul de limites - TS

21 octobre 2021 - 30 min

Déterminer la limite de chaque fonction à l'endroit indiqué, et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$f_1(x) = \dfrac{5x+3}{2x-1}$; en $\dfrac{1}{2}$

$f_2(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2+1}}$; en $+\infty$

$f_3(x) = \sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+2}$; en $+\infty$

$f_4(x) = \dfrac{\cos x}{2x}$; en $-\infty$

$f_5(x) = \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$; en 2

---

① $\lim\limits_{x \to 1/2} (5x+3) = \frac{11}{2}$

$\lim\limits_{x \to 1/2^-} (2x-1) = 0^-$

$\lim\limits_{x \to 1/2^+} (2x-1) = 0^+$

Par quotient $\lim\limits_{x \to 1/2^-} f_1(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1/2^+} f_1(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 1/2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_1$

2

---

② $\dfrac{4x^2}{x^2+1} = \dfrac{x^2 \times 4}{x^2(1+1/x^2)} = \dfrac{4}{1+1/x^2}$

pour $x \neq 0$ Par Somme et quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{1+1/x^2} = 4$

on pose $X = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$

on a $\lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} = 2$

2,5

Par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 2$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_2$ en $+\infty$

③ $f_3(x) = \sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+2} = \left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+2}\right) \times \dfrac{\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+2}}$

en $+\infty$

$$= \frac{(3x-1)-(3x+2)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x+2}} = \frac{-3}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x+2}}$$

Par composé et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+2} = +\infty$

Par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 0$

2/

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_3$ en $+\infty$

---

④ $f_4(x) = \dfrac{\cos x}{2x}$ en $-\infty$

2/

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{2x} \geqslant f_4(x) \geqslant \dfrac{1}{2x}$

$x<0$

or $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$

Par Encadrement

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) = 0$

La droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_4$ en $-\infty$

---

⑤ $f_5(x) = \dfrac{2x^2-3x-2}{x-2}$ en 2

1,5

2 est racine du numérateur et du dénominateur

$$f_5(x) = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)\times 1} = (2x+1) \text{ pour } x \neq 2$$

donc $\lim\limits_{x \to 2} f_5(x) = 5$