Correction du devoir n°3 — TSpé

Ex 1 : Partie A : $f(x) = xe^{-x}$ définie dérivable sur $[0;+\infty[$ /9,5

$f = uv$ donc $f' = u'v + uv'$

1 $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

1 $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Alors f strictement croissante sur $[0;1]$ puis décroissante sur $[1;+\infty[$

Partie B :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) D'après le graphique, (u_n) semble décroissante et converger vers 0

0,5 + 0,5

2) On peut montrer que $0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

• <u>initialisation</u> : pour $n = 0$

0,5 $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ $(\sim 0,37)$

on a bien $0 < u_1 \leq u_0 \leq 1$ vrai pour $n = 0$

0,5 • <u>hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}$, je suppose que $0 < u_{k+1} \leq u_k \leq 1$

on sait que f est strictement croissante sur $[0;1]$

donc $f(0) < f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(1)$

1,5 soit $0 < u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq \frac{1}{e}$ or $\frac{1}{e} \leq 1$

Donc on a : $0 < u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1$ c'est vrai au rang $k+1$

0,5 • <u>Conclusion</u> : On a montré par récurrence que $0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) ⓐ On vient de montrer que (u_n) est décroissante

1 et minorée par 0

Par théorème, la suite (u_n) converge.

ⓑ $f(x) = x \iff xe^{-x} = x \iff x(e^{-x} - 1) = 0$

1 $\iff x = 0$ ou $e^{-x} = 1 \iff x = 0$

Puisque la limite de (u_n) est solution de cette équation, on conclut que (u_n) converge vers 0.

Algo 1,5

Ex2 : 1) $u_0 = 1000$ (abonnés en 2020) /12,5

$u_1 = 1000 \times 0{,}9 + 250$ perdre 10% revient à $\times\left(1-\frac{10}{100}\right) = 0{,}9$

$= 1150$ (en 2021)

1,5

2) $u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 250$ → 250 nouveaux abonnés ($n \in \mathbb{N}$)

↳ perte de 10% d'abonnés

0,5 3) suite(10) renvoie $u_{10} \simeq 1977$ nombre d'abonnés en 2030

4) a) On veut montrer que $u_n \leq 2500$ pour $n \in \mathbb{N}$

- initialisation : pour $n=0$, $u_0 = 1000$ et $1000 \leq 2500$

0,5 c'est vérifié pour $n=0$

0,5 • hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, je suppose que $u_k \leq 2500$

alors $0{,}9\, u_k \leq 0{,}9 \times 2500$

1 donc $0{,}9\, u_k \leq 2250$ c'est vrai au rang $k+1$

et $0{,}9\, u_k + 250 \leq 2250 + 250$

soit $u_{k+1} \leq 2500$

0,5 • Conclusion : C'est vrai pour $n=0$ et c'est héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2500$

b) $u_{n+1} - u_n = 0{,}9\, u_n + 250 - u_n = 250 - 0{,}1\, u_n$

1 $u_n \leq 2500 \iff -0{,}1\, u_n \geq -250 \iff 250 - 0{,}1\, u_n \geq 0$

Alors $u_{n+1} \geq u_n$ et (u_n) est croissante

c) (u_n) est croissante et majorée par 2500

0,75 Par théorème, (u_n) converge

5) Soit $v_n = u_n - 2500$ pour $n \in \mathbb{N}$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 2500$ 0,25 et $v_0 = u_0 - 2500 = -1500$

$= (0{,}9\, u_n + 250) - 2500$

$= 0{,}9\, u_n - 2250$ 0,5 Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9

1 $= 0{,}9(v_n + 2500) - 2250$ de terme initial $v_0 = -1500$

$= 0{,}9\, v_n$

0,5 b) on a donc $v_n = v_0 \times q^n = -1500 \times 0{,}9^n$ et $u_n = v_n + 2500 = 2500 - 1500 \times 0{,}9^n$

c) $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ Par Produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2500$

1 Le nombre d'abonnés va croître et se stabiliser à 2500

6) D'après la calculatrice $u_{15} \approx 2191$ et $u_{16} \approx 2222$

1 Le nombre d'abonnés dépassera les 2200 à partir de 2036

Ex3 : Bonus : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3^n - 7 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

$v_n = u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

1) $S_n = v_0 + \dots + v_{n-1} = \cancel{u_1} - u_0 + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \dots + u_n - \cancel{u_{n-1}} = u_n - u_0$

$S_n = u_n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$

or $v_n = u_{n+1} - u_n = 3^n - 7$

$S_n = (3^0 - 7) + (3^1 - 7) + \dots + (3^{n-1} - 7) = 1 + 3 + \dots + 3^{n-1} - n \times 7$

$= \dfrac{1 - 3^n}{1 - 3} - 7n = -\dfrac{1}{2}(1 - 3^n) - 7n = \dfrac{3^n - 1}{2} - 7n$

2) $u_n = S_n + 1 = \dfrac{3^n - 1}{2} - 7n + 1 = \dfrac{3^n + 1}{2} - 7n$