Devoir n°2 - Dérivées et Raisonnement par Récurrence - TSpé maths

30 septembre 2020 - 15 min

Exercice 1 (1 pt) : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par

$$f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{2x+1}$$

$f = \frac{u}{v}$ $\quad f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad u(x) = e^{x^2-1}$ $\quad u'(x) = 2x e^{x^2-1}$

$v(x) = 2x+1$ $\quad v'(x) = 2$

$$f'(x) = \frac{2x e^{x^2-1}(2x+1) - e^{x^2-1} \times 2}{(2x+1)^2} = \boxed{\frac{2e^{x^2-1}(2x^2+x-1)}{(2x+1)^2}}$$

Exercice 2 (4 pts) :
Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = 2^n - 1$.

- <u>initialisation</u> : pour $n = 1$ $\quad u_1 = 2^1 - 1$
  $u_1 = 1$ et $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$ $\quad$ vrai pour $n = 1$

- <u>hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}^*$ je suppose que $u_k = 2^k - 1$
  je veux montrer que $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$

  or $u_{k+1} = 2u_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1$
  $= 2^{k+1} - 1$ $\quad$ vrai au rang $k+1$

- <u>Conclusion</u> : par principe de récurrence
  $u_n = 2^n - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.