# Devoir n°1 - Dérivées et Raisonnement par Récurrence - TSpé maths

23 septembre 2020 - 30 min

**Exercice 1 (4 pts)** : Déterminer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f_1(x) = xe^{3x} - 3$ sur $\mathbb{R}$

$f_2(x) = 2x\sqrt{5x+1}$ sur $\left]\dfrac{-1}{5}; +\infty\right[$

$f_3(x) = \dfrac{4}{(x^2+2)^3}$ sur $\mathbb{R}$

$f_4(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$

**Exercice 2 (6 pts)** : Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel $n$.

Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$,

$$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$$

Ex 1 : $f_1(x) = xe^{3x} - 3$ sur $\mathbb{R}$ 15

$f_1'(x) = 1 \times e^{3x} + x \times 3e^{3x} = e^{3x}(1+3x)$

du signe de $(1+3x)$ 0,75

$f_2(x) = 2x\sqrt{5x+1}$ sur $\left]\frac{-1}{5}; +\infty\right[$

$f_2'(x) = 2\sqrt{5x+1} + 2x \times \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}} = \dfrac{2(5x+1) + 5x}{\sqrt{5x+1}}$

$= \dfrac{15x+2}{\sqrt{5x+1}}$ du signe de $(15x+2)$ 1,75

$f_3(x) = \dfrac{4}{(x^2+2)^3}$ sur $\mathbb{R}$

$f_3(x) = 4(x^2+2)^{-3}$ donc $f_3'(x) = -12 \times 2x(x^2+2)^{-4} = \dfrac{-24x}{(x^2+2)^4}$

du signe de $(-24x)$ 1,5

$f_4(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$ $f_4'(x) = \dfrac{2e^x(e^x+1) - (2e^x - 1)e^x}{(e^x+1)^2}$

$= \dfrac{e^x(\cancel{2e^x} + 2 - \cancel{2e^x} + 1)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$ 1,5

$f_4'(x) > 0$

Ex2 : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ (15)

9,5

on veut montrer que $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

• initialisation : pour $n = 0$ $u_0 = 2$
et $3/2 \leq 2 \leq 2$ vrai pour $n = 0$ 0,75

• hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $\frac{3}{2} \leq u_k \leq 2$ 0,75
on veut montrer que $3/2 \leq u_{k+1} \leq 2$

$\frac{3}{2} \leq u_k \leq 2$ $u_{k+1} = 1 + \frac{1}{u_k}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \geqslant \frac{1}{u_k} \geqslant \frac{1}{2}$ car $x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{3} \geqslant 1 + \frac{1}{u_k} \geqslant 1 + 1/2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq u_{k+1} \leq 5/3$ or $5/3 < 2$

Donc $3/2 \leq u_{k+1} \leq 2$ vrai au rang $(k+1)$

• Conclusion : on a montré par récurrence que $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ 0,5