Correction du dev n°7 - Tspémaths

Ex 1 : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ sur $]0;+\infty[$ /10

1) ⓐ Par croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

0,75 ⓑ $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$ } Par quotient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

0,75 L'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

2) $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

1

3) $e^x > 0$; $x^2 > 0$ } donc $f'(x)$ est du signe de $(x-1)$

0,5

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

0,75

4) $m \in \mathbb{R}$ e est le minimum pour $f(x)$ atteint en $x = 1$

D'après le tableau de variations

1,5
- $m < e$ $f(x) = m$ n'a pas de solution.
- $m = e$ $f(x) = m$ admet une seule solution
- $m > e$ $f(x) = m$ admet deux solutions (théorème de la bijection sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$

5) $\Delta : y = -x$

$A(a ; f(a)) \in \mathcal{C}_f$ avec $T_A // \Delta$?

ⓐ $\underline{T_A // \Delta \iff f'(a) = -1}$ coefficients $\underline{\text{directeurs}}$ égaux 0,5

$\iff \dfrac{e^a(a-1)}{a^2} = -1$

$\iff e^a(a-1) = -a^2$

$\iff e^a(a-1) + a^2 = 0$

0,75 $\iff$ $\underline{a \text{ est solution de}}$ $e^x(x-1) + x^2 = 0$

ⓑ $g(x) = e^x(x-1) + x^2$ sur $[0 ; +\infty[$

$g'(x) = e^x(x-1) + e^x \times 1 + 2x$

1 $= xe^x + 2x = x(e^x + 2)$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ e^x + 2 > 0 \end{cases}$

Donc $g'(x) \geq 0$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	-1 ↗	$+\infty$

1

Par produit et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

ⓒ g continue sur $[0 ; +\infty[$

g strictement croissante

1,5 $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

D'après le théorème de la bijection l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution a sur $[0 ; +\infty[$ $(a > 0)$

$g(a) = 0 \iff T_A // \Delta$ en $A(a ; f(a))$

$\underline{\text{unique}}$ point en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à Δ

Ex 2 :

(I) $\boxed{g(x) = \ln x + 2x - 2}$ sur $]0;+\infty[$ /10

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ Par somme $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -\infty$ 1

2) $g'(x) = \frac{1}{x} + 2$ $x>0$ donc $g'(x) > 0$

alors

x	0		$+\infty$
$g(x)$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0,5 + 0,25 + 0,5

3). • g continue sur $]0;+\infty[$ (somme de fonctions usuelles continues)

• g ~~strictement~~ croissante

• $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

D'après le théorème de la Bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.

1

4) $g(1) = \ln 1 + 2 - 2 = 0$

donc

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

0,25 + 0,5

(II) $\boxed{f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 1)}$ sur $]0;+\infty[$

1) ⓐ $f = uv$ $f' = u'v + uv'$

$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$

$= \frac{\ln x - 1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\ln x - 1 + 2x - 1}{x^2}$

1,5

$= \frac{g(x)}{x^2}$

b) $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

0,25

0,75

2) $f(x) = 0 \iff 2 - \frac{1}{x} = 0$ ou $\ln x - 1 = 0$

$\iff \frac{1}{x} = 2$ ou $\ln x = 1$

$\iff x = 1/2$ ou $x = e$ $\quad S = \{ \frac{1}{2} ; e \}$

donc

x	0		$1/2$		e		$+\infty$
$f(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

1 + 0,5

III - $F' = f$ F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

1) d'après le tableau de signes de $f(x) = F'(x)$ on a F strictement croissante sur $]0; 1/2[$ et sur $]e; +\infty[$, strictement décroissante sur $[1/2 ; e]$

1

2) $\mathcal{C}_F$ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points

1 d'abscisses a telles que $F'(a) = f(a) = 0$

donc en $A(1/2 ; F(1/2))$ et en $B(e ; F(e))$

Ex 3 : Espace : dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(2;0;0)$
$B(0;3;0)$
$C(0;0;1)$

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4$

or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$AB^2 = 2^2+3^2 = 13 \iff AB = \sqrt{13}$

$AC^2 = 2^2+1^2 = 5 \iff AC = \sqrt{5}$ 1,5

on a donc $\sqrt{13}\sqrt{5}\cos\widehat{BAC} = 4 \iff \cos\widehat{BAC} = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$

d'après la calculatrice $\boxed{\widehat{BAC} \simeq 60°}$ +0,5

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = 0+0+1 = 1$ $1 \neq 0$ 1

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux

donc le triangle ABC n'est pas rectangle en C

2) a) $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -6+6+0 = 0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = -6+0+6 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$

or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) 1

alors $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

b) on a donc (ABC) : $3x+2y+6z+d=0$ $(d\in\mathbb{R})$

$A \in (ABC) \iff 6+d = 0 \iff d = -6$ 1

Une équation cartésienne de (ABC) est

$\boxed{3x+2y+6z-6=0}$

3) a) $(d)\perp(ABC)$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d)

$O \in (d)$ donc (d) : $\begin{cases}x = 3t\\ y = 2t\\ z = 6t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ 1

b) Soit $H\left(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49}\right)$

$3\times\frac{18}{49} + 2\times\frac{12}{49} + 6\times\frac{36}{49} - 6 = \dfrac{54+24+216}{49} - 6$

$= \dfrac{294}{49} - 6 = 6-6 = 0$ donc $\boxed{H \in (ABC)}$

de plus $x_H = \frac{18}{49} = 3t \Longleftrightarrow t = \frac{6}{49}$

alors $2t = \frac{12}{49} = y_H$ et $6t = \frac{36}{49} = z_H$ donc $H \in d$

H est l'intersection de d et (ABC) 1

ⓒ $OH^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2 + \left(\frac{36}{49}\right)^2 = \frac{324+144+1296}{49^2} = \frac{1764}{49^2}$

$\Rightarrow OH^2 = \frac{42^2}{49^2}$ donc $OH = \frac{42}{49} = \frac{6}{7}$ 0,5

4) $V = \frac{1}{3} B h$.

ⓐ Soit OAB la Base de la pyramide OABC

alors (OC) est la hauteur correspondante $\begin{cases}(OC) \perp (OA) \\ (OC) \perp (OB)\end{cases}$

$B = \frac{1}{2} OA \times OB = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$ u.a. 1

triangle rectangle en O

et $OC = h = 1$ Donc $V = \frac{1}{3} \times 3 = 1$ u.v

ⓑ soit ABC la Base de la pyramide

alors (OH) est la hauteur associée :

0,5 H est le projeté orthogonal de O

sur le plan (ABC) ($(OH) \perp (ABC)$ et $H \in (ABC)$)

on a donc $V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \times B \times OH$

$= \frac{1}{3} \times B \times \frac{6}{7} = \frac{2}{7} B$

1

on résout $\frac{2}{7} B = 1 \Longleftrightarrow B = 7/2$ u.a

Le triangle ABC a une aire de 7/2 u.a.