Correction du devoir 6 - TSpé

Ex 1 : Dans le repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$B(6;0;0)$
$D(0;6;0)$
$E(0;0;6)$
$F(6;0;6)$
$R(0;4;6)$
$P(2;0;0)$
$Q(0;0;2)$
$\Omega(3;3;3)$
$I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{8}{3}\right)$
$J(6;4;0)$
$K(6;6;2)$

14

1) a) coordonnées 1

b) $\overrightarrow{QP}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles 1,25

$\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{QR}$ non colinéaires

et P, Q, R définissent un plan

c) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ normal à (PQR)

$\iff \vec{n} \perp \overrightarrow{QP}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{QR}$

$\iff \vec{n}\cdot\overrightarrow{QP} = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{QR} = 0$

$\iff 2+0-2c=0$ et $0+4b+4c=0$

$\iff c = 1$ et $b = -1$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 1,25

d) Une équation du plan (PQR) est donc de la forme $x-y+z+d=0$

or $P \in (PQR) \iff 2-0+0+d=0 \iff d=-2$

Donc $(PQR) : x-y+z-2=0$ 1,25

2) a) $\Delta \perp (PQR)$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ et $\Omega \in \Delta$

alors $\Delta : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 3-t \\ z = 3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ 1,25

(b) On résout l'équation

$(3+t) - (3-t) + (3+t) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$

donc Δ coupe (PQR) en $I\left(\frac{8}{3} ; \frac{10}{3} ; \frac{8}{3}\right)$

$x_I = 3 - 1/3 = \frac{9}{3} - \frac{1}{3} = 8/3 = z_I$

$y_I = 3 + 1/3 = 9/3 + 1/3 = \frac{10}{3}$

1,25

(c) $\Omega I^2 = \left(\frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 3\right)^2$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

$\Leftrightarrow \Omega I = \frac{\sqrt{3}}{3}$

1,25

3) (a) $6 - 4 + 0 - 2 = 0$

donc $J \in (PQR)$

0,5

(b) $\vec{JK}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{QR}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

$\vec{QR} = 2\vec{JK}$ les vecteurs sont colinéaires

donc $(QR) // (JK)$

1

Ex2 :

1) $(d) : \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

(d') passe par $B(4;4;-6)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

donc $(d') : \begin{cases} x = 4+5k \\ y = 4+2k \\ z = -6-9k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

1-b

$\begin{cases} -1+t = 4+5k & (1) \\ 2-t = 4+2k & (2) \\ 3+t = -6-9k \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 8+7k & (1)+(2) \\ 2-t = 4+2k \\ t = -9-9k \end{cases}$

$\iff \begin{cases} k = -1 \\ 2-0 = 4-2 \text{ vrai} \\ t = 0 \end{cases}$

donc (d) et (d') se coupent en $A(-1;2;3)$

(d) et (d') sont donc coplanaires

VRAI

2) $A(0;1;-1)$
$B(2;1;3)$
$C(-3;-1;1)$
$D(7;3;-1)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$\iff \begin{cases} 2 = -3\alpha + 7\beta \\ 0 = -2\alpha + 2\beta \\ 4 = 2\alpha \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2 = -6+14 \text{ faux} \\ \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases}$

le système n'a pas de solution

donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ non coplanaires

et A, B, C, D non coplanaires Faux

3) (d) passe par $A(-3;7;-12)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$

(d'): $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -4t+3 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = 10t-2 \end{cases}$

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\\10\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d')

$\vec{v} = 2\vec{u}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires donc $(d) \mathbin{/\mkern-3mu/} (d')$

$A \in (d')$? $-3 = 2t-1 \iff 2t = -2 \iff t = -1$

alors $-4t+3 = 4+3 = 7 = y_A$

et $10t-2 = -10-2 = -12 = z_A$

donc $A\in(d')$ et $A\in(d)$ alors (d) et (d') sont confondus VRAI

4) $(MB)\perp(MD) \iff \vec{BM}\cdot\vec{DM} = 0$ (*)

$\vec{BM}\begin{pmatrix}t-1\\t\\t\end{pmatrix}$ $\vec{DM}\begin{pmatrix}t\\t-1\\t\end{pmatrix}$

(*) $\iff t(t-1)+t(t-1)+t^2 = 0$

$\iff 3t^2-2t = 0 \iff t(3t-2) = 0$

$\iff t = 0$ ou $t = 2/3$

Il y a donc 2 positions du point M telles que $(MB)\perp(MD)$ VRAI

pour $t=0$ M et A confondus

et pour $t = 2/3$ $M(2/3\,;2/3\,;2/3)$