Correction du devoir n° 5 - Tspé

19,0

Ex 1 : $\boxed{(E) : \ln x = -x}$

Ⓐ $f(x) = x + \ln x$ sur $]0;+\infty[$

1) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ $\quad f'(x) > 0$ donc f strictement croissante sur $]0;+\infty[$ **0,75**

2) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ $\quad$ par somme $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f continue (somme de fonctions continues)

f strictement croissante sur $]0;+\infty[$

D'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0;+\infty[$ **1,5**

3) $\begin{cases} f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \ln(\frac{1}{2}) \simeq -0{,}2 \ (<0) \\ f(1) = 1 + \ln 1 = 1 \quad (>0) \end{cases}$ $\quad$ Donc $\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ **0,5**

Ⓑ $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$ sur $]0;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ par produit et somme $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$

ⓐ $g(x) = \dfrac{x}{5}\left(4 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées

par somme et produit $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ **1,25**

ⓑ $g'(x) = \dfrac{1}{5}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{4x - 1}{5x}$ **0,5**

$5x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $4x - 1$

x	0		$1/4$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+\infty \searrow$	$g(1/4)$	$\nearrow$	$+\infty$

1

$$g(1/4) = \frac{1-\ln(1/4)}{5} = \frac{1+\ln 4}{5} \approx 0,5$$

c) $\ln x = -x \iff -\ln x = x \iff 4x - \ln x = 5x$

0,5

$\iff \dfrac{4x - \ln x}{5} = \dfrac{5x}{5} \iff g(x) = x$

2) $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

a) On veut montrer que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

- pour $n = 0$: $u_0 = \frac{1}{2}$; $u_1 = g(1/2) \approx 0,53$

  on a $1/2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ vrai pour $n = 0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$: on suppose que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

  g strictement croissante sur $[1/4 ; +\infty[$

  donc $g(\frac{1}{2}) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$ 2,5

  $g(1/2) \approx 0,53$ $(>0,5)$ et $g(1) = 0,8$ (<1)

  donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$ vrai au rang $(n+1)$

- On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1/2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

b) Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1

par théorème, (u_n) converge vers l (avec $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$) 0,5

$u_{n+1} = g(u_n)$ avec g continue sur $[1/2 ; 1]$

d'après le théorème du point fixe, l vérifie 1

$l = g(l) \iff \ln l = -l \iff l + \ln l = 0 \iff f(l) = 0 \iff l = \alpha$

d'après A 2

Bonus: 3) a) $u_{10} \approx 0,567124$ arrondi à 10^{-6}

b) $0,566 \leq \alpha \leq 0,568$

Ex 2 : 1) $f(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2x + x^{-2}$

sur $]0;+\infty[$ $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^{-2}}{-2} + K = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{2x^2} + K$

toutes les primitives de f

1

2) $g(x) = x(x^2-1)^3$ sur $\mathbb{R}$ $\quad g = \frac{1}{2}u'u^3$

0,75 Donc $G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2-1)^4}{4} + K = \frac{1}{8}(x^2-1)^4 + K$

3) $h(x) = e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad H(x) = \frac{-1}{3}e^{-3x} + K$ 0,75

4) $k(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ sur $[-1;1]$ $\quad k = \frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$

$K(x) = \sqrt{x^2-4x+3} + K$ 0,75 $K \in \mathbb{R}$

/4

5) $j(x) = \frac{1}{3x+1}$ sur $]\frac{-1}{3};+\infty[$ $\quad 3x+1>0$

$J(x) = \frac{1}{3}\ln(3x+1) + K$

1

/9

Ex 3 : 1) $(E_1) : y' = \frac{y}{4}$

| f solution de (E') avec $f(0) = 95$ (nombre d'individus en centaines à $t=0$ année)

ⓐ on reconnait l'équation $y' = ay$; les solutions sont du type Ke^{at} $(K \in \mathbb{R})$ alors $f(t) = Ke^{t/4}$

1 $f(0) = 95 \Leftrightarrow Ke^0 = 95 \Leftrightarrow K = 95$: $f(t) = \frac{1}{2}e^{t/4}$

ⓑ $f'(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}e^{1/4\,t} = \frac{1}{8}e^{1/4\,t}$ $\quad f'(t) >0$

donc f strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{4} = +\infty$ par composition et produit $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$

1,5

La population ne cesse de croître indéfiniment au fil des années

ⓒ $g(t) \geq 3 \iff \frac{1}{2} e^{t/4} \geq 3 \iff e^{t/4} \geq 6$

$\iff t/4 \geq \ln 6 \iff t \geq 4 \ln 6 \ (\sim 7{,}2)$

$x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0;+\infty[$

0,5

Au bout de 8 ans, la population aura dépassé les 300 individus.

2) g nombre d'individus en centaines

g solution de (E_2) : $y' = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{12}$ avec $g(0) = 20$

ⓐ on suppose que $g(t) > 0$ sur $]0;+\infty[$

soit $h = \frac{1}{g}$ alors $h' = \frac{-g'}{g^2}$

g solution de $(E_2) \iff g' = \frac{g}{4} - \frac{g^2}{12}$

$\iff \frac{g'}{g^2} = \frac{1}{4g} - \frac{1}{12} \iff -h' = \frac{1}{4} h - \frac{1}{12}$

1

$\iff h' = \frac{-1}{4} h + \frac{1}{12} \iff$ h solution de (E_3)

ⓑ (E_3) : $y' = \frac{-1}{4} y + \frac{1}{12}$ de la forme $y' = ay + b$

les solutions sont de la forme $Ke^{ax} - b/a$

$-b/a = \frac{-1/12}{-1/4} = \frac{1}{12} \times 4 = \frac{1}{3}$ donc $h(t) = K e^{-t/4} + \frac{1}{3}$

$h(0) = \frac{1}{g(0)} = \frac{1}{20} \iff Ke^0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{20} \iff K = \frac{-17}{60}$ $(K \in \mathbb{R})$

1

alors $h(t) = \frac{-17}{60} e^{-t/4} + \frac{1}{3} = \frac{-17 e^{-t/4} + 20}{60}$

et $g(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{60}{-17 e^{-t/4} + 20}$

0,5

ⓒ $h'(t) = \frac{-17}{60} \times \frac{-1}{4} e^{-t/4}$ $h'(t) > 0$ h strictement croissante

1,25

donc g est ~~strictement~~ décroissante par composition

$\lim_{t \to +\infty} -t/4 = -\infty$ par composition produit et somme $\lim_{t \to +\infty} (-17 e^{-t/4} + 20) = 20$

par quotient $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 3$ La population des rongeurs décroit et se stabilise à 300 rongeurs

0,5