Correction du dev n°3 - TSpé maths

Ex 1 : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+3} & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \ (x \neq 0) \end{cases}$ sur $\mathbb{R}^*$ (/5)

1) • f continue sur $]1;+\infty[$ comme composée de fonctions continues et f continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$ (fonction inverse) 0,5

• en 1 ? $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+3} = 1 = f(1)$

donc f est continue en 1 1,5

Alors f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

2) • f dérivable sur $]1;+\infty[$ comme composée et f dérivable sur $]-\infty;1[\setminus\{0\}$ (fonction $1/x$) 0,5

• en 1 ? $T_1(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$x<1$ $(x \neq 0)$ $T_1(x) = \frac{1/x - 1}{x-1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \frac{1-x}{x} \times \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{x}$ 0,75

$x>1$ $T_1(x) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{2(x-1)} \times \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}$

$= \frac{x^2+3-4}{2(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x^2-1}{2(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$= \frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x+1}{2(\sqrt{x^2+3}+2)}$ 1,25

$\lim\limits_{x \to 1^-} T_1(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} T_1(x) = \frac{1}{4}$

$-1 \neq \frac{1}{4}$ donc f n'est pas dérivable en 1 0,5

f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Ex 2 : (A) $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ sur $\mathbb{R}$ 0,25

1) $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x+1)(2x-1)$ 0,5

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$ $a=12$		+	0	−	0	+	
	du signe de a à l'extérieur des racines						
$g(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘	-9	↗	$+\infty$

1

0,25

g polynôme donc

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ 1,25

2) • sur $]-\infty; 1/2]$, -7 est le maximum pour g atteint en $x = -1/2$ donc $g(x) < 0$ 1

• sur $[1/2; +\infty[$, g continue (polynôme)
g strictement croissante
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $g(1/2) = -9$
$-9 < 0$ 2

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[1/2; +\infty[$

• Au Total une seule solution α sur $\mathbb{R}$ 0,25

$\begin{cases} g(1,45) < 0 \\ g(1,46) > 0 \end{cases}$ donc $1,45 < \alpha < 1,46$ 0,75

3) D'après la question précédente

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

0,5

(B) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{4x^2-1}$ sur $]1/2; +\infty[$

0,25

1) f fonction rationnelle

a) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{4x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ 1

b) $\lim\limits_{x \to 1/2} (x^3 + 1) = 9/8$
$\lim\limits_{x \to 1/2^+} (4x^2 - 1) = 0^+$
Tableau de signes fait en (A) 1)

Par quotient $\lim\limits_{x \to 1/2^+} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 1/2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

1 + 0,5

Ex 2 : A $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ sur $\mathbb{R}$ 0,25

1) $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x+1)(2x-1)$ 0,5

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$ $a = 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
	du signe de a à l'extérieur ~~des racines~~						
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

1 0,25

g polynôme donc

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ 1,25

2) • Sur $]-\infty ; 1/2]$, -7 est le maximum pour g atteint en $x = -1/2$ donc $g(x) < 0$ 1

• sur $[1/2 ; +\infty[$, g continue (polynôme)
g strictement croissante
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $g(1/2) = -9$
$-9 < 0$ 2

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution

2) ⓐ $f=\frac{u}{v}$ $\quad f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\frac{3x^2(4x^2-1)-(x^3+1)\times 8x}{(4x^2-1)^2}$$

$$=\frac{12x^4-3x^2-8x^4-8x}{(4x^2-1)^2}=\frac{4x^4-3x^2-8x}{(4x^2-1)^2}$$

on a bien $f'(x)=\dfrac{x\,g(x)}{(4x^2-1)^2}$ 1,5

ⓑ $(4x^2-1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

$x>0$ sur $]\frac{1}{2};+\infty[$ 0,5

donc

x	$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

1

3) $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1}$ or $g(\alpha)=0 \iff 4\alpha^3-3\alpha-8=0$

1

$\iff 4\alpha^3=3\alpha+8$

$\iff \alpha^3=\frac{3}{4}\alpha+2$

$\iff \alpha^3+1=\frac{3}{4}\alpha+3$

$\iff \alpha^3+1=\frac{3}{4}(\alpha+4)$

Donc $f(\alpha)=\dfrac{\alpha(\alpha^3+1)}{\alpha(4\alpha^2-1)}$

$$=\frac{\frac{3}{4}\alpha(\alpha+4)}{4\alpha^3-\alpha}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\alpha(\alpha+4)}{2\alpha+8}$$

$$=\frac{3/4\,\alpha\,(\alpha+\cancel{4})}{2\,(\alpha+\cancel{4})}$$

Donc $f(\alpha)=\frac{3}{8}\alpha$

OU $f(\alpha)-\frac{3}{8}\alpha$

$$=\frac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1}-\frac{3}{8}\alpha$$

$$=\frac{8(\alpha^3+1)-3\alpha(4\alpha^2-1)}{8(4\alpha^2-1)}$$

$$=\frac{8\alpha^3+8-12\alpha^3+3\alpha}{8(4\alpha^2-1)}$$

$$=\frac{-g(\alpha)}{8(4\alpha^2-1)}=0$$

$1{,}45<\alpha<1{,}46 \underset{(\times\frac{3}{8})}{\iff} 0{,}54375<f(\alpha)<0{,}5475$ 0,75

donc $0{,}54<f(\alpha)<0{,}55$

Bonus : C $g(1) = -7$ donc on balaye $a = 1{,}01\ldots$

$a = 1$ $g(1) < 0$ tant que $g(a) \times g(a+h) > 0$

on cherche $g(x) = 0$ $\quad <0 \quad <0$

donc le prog 2 ne convient pas

c'est le prog 1 qui convient

"print" n'est pas dans la boucle

D $\mathcal{D} : y = \frac{1}{4}x$

1) D'après la calculatrice, Il semble que $\mathcal{C}_f$ soit au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $]1/2 ; +\infty[$

2) $M(x ; f(x)) \in \mathcal{C}_f$
$N(x ; \frac{1}{4}x) \in \mathcal{D}$

Il semble que MN tende vers 0 quand x tend vers $+\infty$

3) $f(x) - \frac{1}{4}x = \frac{x^3+1}{4x^2-1} - \frac{1}{4}x = \frac{(4x^3+4) - (4x^3 - x)}{4(4x^2-1)}$

$= \frac{x+4}{4(4x^2-1)}$

sur $]1/2 ; +\infty[$
$x + 4 > 0$
$4(4x^2-1) > 0$

donc $f(x) > \frac{1}{4}x$: $\mathcal{C}_f$ est bien au-dessus de $\mathcal{D}$

$MN^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2$

$= 0 + \left(f(x) - \frac{1}{4}x\right)^2$

$= \left(\frac{x+4}{4(4x^2-1)}\right)^2$

$MN = \frac{x+4}{4(4x^2-1)}$ fonction rationnelle

$\lim_{x \to +\infty} MN = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{16x^2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{16x} = 0$