Correction du dev n°1 - Tspé

Ex 1 :

1) $u_n = \dfrac{-2n^3 - 5n + 1}{3n^2 - 1}$ $(n \in \mathbb{N})$

pour $n \neq 0$
$$u_n = \frac{n^3\left(-2 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)} = \left(\frac{-2 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{1}{n^2}}\right) \times n$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -2 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3} = -2$ par somme

$\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - \frac{1}{n^2} = 3$ par somme et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

Par quotient et produit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$

2) $u_n = -3n - \sin n$ $n \in \mathbb{N}$

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \geq -\sin n \geq -1$

$\Leftrightarrow 1 - 3n \geq -3n - \sin n \geq -1 - 3n$

on a $u_n \leq 1 - 3n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - 3n) = -\infty$

par comparaison $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$

3) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} + 2$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{(-1)}{n^2} \leq \dfrac{(-1)^n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-1}{n^2} + 2 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2} + 2$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{n^2} + 2\right) = 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 2\right) = 2$

D'après le théorème des gendarmes

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$

Ex2 : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \boxed{u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) $u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$

$u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{14}{9} + \frac{3}{9} + \frac{9}{9} = \frac{26}{9} \approx 2{,}89$

il semble que (u_n) soit croissante

2) ⓐ on veut montrer que : $u_n \leq n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- initialisation : pour $n = 0$

$u_0 = 2$ et $0 + 3 = 3$ $u_0 \leq 0 + 3$ c'est vérifié

- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose que $u_n \leq n + 3$

je veux montrer que $u_{n+1} \leq n + 4$

$u_n \leq n + 3$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n + 2$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$

$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq n + 3$ or $n + 3 \leq n + 4$

donc $u_{n+1} \leq n + 4$ c'est vrai au rang $(n+1)$

- conclusion : On a montré par récurrence que $u_n \leq n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ⓑ $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = \frac{1}{3}n + 1 - \frac{1}{3}u_n$

$= \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ $n \in \mathbb{N}$

or $u_n \leq n + 3 \Leftrightarrow n + 3 - u_n \geq 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

(u_n) est croissante

3) $\boxed{v_n = u_n - n}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$

$= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $2/3$
de 1er terme $v_0 = u_0 = 2$

ⓑ alors $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

et $u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓒ $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Ex3 : $\begin{cases} u_0 = 0{,}7 \\ \boxed{u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} = f(u_n)} \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$

où $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$ sur $[0;+\infty[$

1) f dérivable sur $[0;+\infty[$ comme quotient
$(1+2x \neq 0)$

$\boxed{f'(x)} = \dfrac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \boxed{\dfrac{3}{(1+2x)^2}}$

$f'(x) > 0$ donc f strictement croissante sur $[0;+\infty[$

2) On veut montrer la propriété

P_n : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ » pour $n \in \mathbb{N}$

. initialisation : pour $n = 0$

$u_0 = 0{,}7$ et $u_1 = \dfrac{3 \times 0{,}7}{1 + 2 \times 0{,}7} = \dfrac{2{,}1}{2{,}4} = \dfrac{21}{24} = \dfrac{7}{8} = 0{,}875$

on a $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$ P_0 vraie

• __Hérédité__ : soit $n \in \mathbb{N}$, je suppose P_n vraie 4
je veux montrer P_{n+1} vraie

on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$

$\Leftrightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$

f ~~strictement~~ croissante sur $[0;+\infty[$ or $f(0)=0$
et $f(1) = 1$

on a donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$

P_{n+1} __vraie__

• __Conclusion__ : P_0 vraie et P_n héréditaire
alors P_n vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
__alors__ (u_n) est croissante et majorée par 1
__Par__ théorème, (u_n) __converge__

4) $x = f(x)$ sur $[0;+\infty[$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{3x}{1+2x}$

$\Leftrightarrow x + 2x^2 = 3x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

la limite l vérifie
$l = f(l)$

or $u_0 = 0,7$ et (u_n) est croissante

__donc__ $l = 1$.

Ex4 (Bonus)

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3^n - 7 \end{cases}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

et $v_n = u_{n+1} - u_n$; $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

1) $S_n = (\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + \dots + (u_n - \cancel{u_{n-1}})$

$= u_n - u_0 = \boxed{u_n - 1}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

$v_n = u_{n+1} - u_n = 3^n - 7$

donc $S_n = (3^0 - 7) + (3^1 - 7) + \dots + (3^{n-1} - 7)$

$= (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) - 7n$

$= \frac{1 - 3^n}{1 - 3} - 7n = \frac{3^n - 1}{2} - 7n$

$= \boxed{\frac{3^n}{2} - 7n - \frac{1}{2}}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

2) on a donc $u_n - 1 = \frac{3^n}{2} - 7n - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{u_n = \frac{3^n}{2} - 7n + \frac{1}{2}}$