Correction du test 4 - Suites - TS

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

1) On veut montrer par récurrence que $1 \leqslant u_n \leqslant e^2$ $(n \in \mathbb{N})$ 2

- initialisation : pour $n = 0$ $u_0 = 1$
  donc $1 \leqslant u_0 \leqslant e^2$ vrai pour $n = 0$
- hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $1 \leqslant u_k \leqslant e^2$

$1 \leqslant u_k \leqslant e^2$ $x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_k} \leqslant \sqrt{e^2}$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{u_k} \leqslant e$

$\underset{\times e}{\Leftrightarrow} e \leqslant e\sqrt{u_k} \leqslant e^2 \Rightarrow 1 \leqslant u_{k+1} \leqslant e^2$

$1 \leqslant e$ vrai au rang $(k+1)$

- conclusion : c'est vrai pour $n = 0$, c'est héréditaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{1 \leqslant u_n \leqslant e^2}$$

2) ⓐ $u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n})$

$(u_n > 0, n \in \mathbb{N})$ or $u_n \leqslant e^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{u_n} \leqslant e$ 1

$\Leftrightarrow e - \sqrt{u_n} \geqslant 0$

On a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante

ⓑ (u_n) est croissante et majorée par e^2 donc convergente (théorème suites monotones) 0,5

3) $\boxed{v_n = \ln(u_n) - 2}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$

$= \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$

$= \ln e + \ln(\sqrt{u_n}) - 2$

$= 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$

$= \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$

$= \frac{1}{2} v_n$ 1,5

et $v_0 = \ln(u_0) - 2 = \ln 1 - 2 = -2$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de 1er terme $v_0 = -2$ 0,5

ⓑ alors $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2^{n-1}}$ 0,5

ⓒ $v_n = \ln(u_n) - 2$

$\iff v_n + 2 = \ln(u_n)$

$\iff e^{v_n + 2} = u_n \iff u_n = e^{-\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) + 2}$

$(n \in \mathbb{N})$ 0,5

ⓓ $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 = 2$

Par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$, 1

4) A1 $\begin{cases} u_0 = 2018 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ Faux

$u_1 = e\sqrt{u_0} = e\sqrt{2018} \simeq 122$

$u_1 < u_0$ (u_n) n'est pas croissante

0,5

A2 $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = e\sqrt{u_n} \end{cases}$ $e^2 \simeq 7,4$

La propriété $1 \leq u_n \leq e^2$ est vérifiée pour $n = 0$ et héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ VRAI

1

A3 $u_{n+1} = u_n \iff e\sqrt{u_n} = u_n$

$\iff e\sqrt{u_n} - u_n = 0$

$\iff \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n}) = 0$

Faux

$\iff \sqrt{u_n} = 0$ ou $\sqrt{u_n} = e$

$\iff u_n = 0$ ou $u_n = e^2$

(u_n) constante $\iff u_0 = 0$ ou $u_0 = e^2$

1