Fonctions - TS

Partie A : $f(x)=(ax+b)e^{-\frac{1}{2}x}$ sur $[0;+\infty[$

1) • $f(0)=1$ d'après le graphique 0,25

• $f'(1)=0$ coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 (tangente horizontale) 0,75

2) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée et produit

$f=uv \qquad f'=u'v+uv'$

$$f'(x)=a\,e^{-\frac{1}{2}x}+(ax+b)\,e^{-\frac{1}{2}x}\times\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$=e^{-\frac{1}{2}x}\left(a-\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}b\right)$$

$$=\boxed{\left(-\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}b+a\right)e^{-\frac{1}{2}x}}$$

1

3) $f(0)=1$

$\iff b\,e^{0}=1$

$\iff b\times 1=1$

$\iff b=1$

$f'(1)=0$

$\iff \left(-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+a\right)e^{-\frac{1}{2}}=0$

$\iff \left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}}=0$

$\iff \frac{1}{2}a=\frac{1}{2} \iff a=1$

Donc $\boxed{f(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{2}x}}$

2

Partie B : $f(x) = (x+1)e^{-1/2x}$ sur $[0;+\infty[$ 1,5

1) @ $2\left(\frac{1/2x}{e^{1/2x}}\right) + e^{-1/2x} = 2 \times \frac{1}{2} x \times e^{-1/2x} + e^{-1/2x}$ 0,5

$= x e^{-1/2x} + e^{-1/2x} = (x+1)e^{-1/2x} = f(x)$

ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{2}x = -\infty$; $X = \frac{-1}{2}x$; $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ } Par composée $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1/2x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1/2x = +\infty$

$Y = 1/2x$ $\lim\limits_{Y \to +\infty} \frac{Y}{e^Y} = 0$ par croissance comparée

donc $\boxed{\lim 2\left(\frac{1/2x}{e^{1/2x}}\right) = 0}$ par composée et produit

1

Par Somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 1\right)e^{-1/2x} = e^{-1/2x}\left(\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

$e^{-1/2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\left(\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$ 0,5

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	0

$f(1) = 2e^{-1/2}$
$\simeq 1{,}21$

0,75

3). • sur $[0;1[$, f strictement croissante avec $f(0)=1$ donc l'équation

0,5 $f(x) = 907$ n'admet aucune solution

• sur $[1;+\infty[$ f continue, strictement décroissante

$f(1) \approx 1,21$ (>907) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

D'après le corollaire du théorème

1 des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 907$ admet une seule solution α sur $[1;+\infty[$

Donc au total une seule solution α sur $[0;+\infty[$ 0,25

$10,1 < \alpha < 10,2$

4) $\left.\begin{array}{l} f(10,1) > 907 \\ f(10,2) < 907 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\alpha \approx 10}$

0,5

Partie C : $\mathcal{C}$ modélise le tas de sable
x et $f(x)$ en m

14

1) contre le mur de droite, la hauteur de sable doit être de 7 cm $= 0{,}07$ m
D'après la partie B, 3) l'équation $f(x) = 0{,}07$ admet une seule solution sur $[0;+\infty[$ d'environ 10.
1 Donc le mur de droite doit être à 10 m du mur de gauche.

2) $G(x) = (-2x-4)e^{-\frac{1}{2}x}$ définie dérivable sur $[0;10]$

$G'(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} + (-2x-4)e^{-\frac{1}{2}x} \times \left(\frac{-1}{2}\right)$

$= (-2+x+2)e^{-\frac{1}{2}x} = xe^{-\frac{1}{2}x} = g(x)$

1 donc G est une primitive de g

3) $f(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{2}x} = xe^{-\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} = g(x) + e^{-\frac{1}{2}x}$

donc $F(x) = G(x) + \dfrac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}}$

$= (-2x-4)e^{-\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}$

1 $= (-2x-6)e^{-\frac{1}{2}x}$

est une primitive de f sur $[0;10]$

4) Il s'agit de calculer la valeur moyenne de f sur $[0;10]$ f continue positive

$$M = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(x)\,dx = \frac{1}{10}\left(F(10) - F(0)\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(-26e^{-5} + 6\right) = \frac{3-13e^{-5}}{5} \simeq 0{,}58$$

Une fois le nivellement réalisé la hauteur du sable sera de 58 cm environ.