Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0;0;0)$

$B(1;0;0)$

$D(0;1;0)$

$E(0;0;1)$

$J(1;1;\frac{2}{5})$

$H(0;1;1)$

$F(1;0;1)$

$I(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

$M(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7})$

$L(0;1;\frac{a}{2})$

Partie A

1) on veut montrer que $I(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

I milieu de $[AH]$ et $[ED]$

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_H}{2} = 0 \\ y_I = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ z_I = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\boxed{I(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})}$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ)

a) si $\vec{n} \perp \vec{FI}$ et $\vec{n} \perp \vec{FJ}$

$\vec{FI}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$ et $\vec{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-3/5\end{pmatrix}$

$$\vec{n}\cdot\vec{FI} = (-1)\times(-1) + 3\times\frac{1}{2} + 5\times\left(\frac{-1}{2}\right)$$
$$= 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

donc $\vec{n} \perp \vec{FI}$

$$\vec{n}\cdot\vec{FJ} = (-1)\times 0 + 3\times 1 + 5\times\left(\frac{-3}{5}\right)$$
$$= 3 - 3 = 0$$

donc $\vec{n} \perp \vec{FJ}$

$\vec{n}$ orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (FIJ) donc $\vec{n} \perp (FIJ)$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ normal à (FIJ)

donc (FIJ) : $-x+3y+5z+d=0$

or $F \in (FIJ) \iff -1+3\times0+5+d=0$

$\iff 4+d=0$

$\iff d=-4$

Donc une équation cartésienne de (FIJ) est $\boxed{-x+3y+5z-4=0}$

3) $d \perp (FIJ)$ et d passe par B

a) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d

Donc $\boxed{\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5t \end{cases}}$

est une représentation paramétrique de d

b) Soit M l'intersection de d et du plan (FIJ)

on résout

$-(1-t)+3\times3t+5\times5t-4=0$

$\iff -1+t+9t+25t-4=0$

$\iff 35t-5=0 \iff t=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

Donc, en remplaçant, on obtient $\boxed{M\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)}$

4) a) $\vec{BM}\begin{pmatrix}-1/7\\3/7\\5/7\end{pmatrix}$ et $\vec{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{BM}\cdot\vec{BF}=\frac{-1}{7}\times0+\frac{3}{7}\times0+\frac{5}{7}\times1=\frac{5}{7}$

b) or $\vec{BM}\cdot\vec{BF}=BM\times BF\times\cos\widehat{MBF}$

$$BM^2 = \left(\frac{-1}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$= \frac{1}{49} + \frac{9}{49} + \frac{25}{49} = \frac{35}{49}$$

donc $BM = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$

et $BF^2 = 1$ donc $BF = 1$

Donc $\frac{\sqrt{35}}{7} \times 1 \times \cos \widehat{MBF} = \frac{5}{7}$

$\Leftrightarrow \cos \widehat{MBF} = \frac{5}{\sqrt{35}}$

D'après la calculatrice

$\widehat{MBF} \simeq 32°$

Partie B

$J \in [CG]$ avec $J(1;1;a)$; $0<a<1$

1) On veut montrer que FKLJ est un parallélogramme

Les faces BCGF et ADHE sont parallèles donc $(FJ) // (KL)$

Les faces FBAE et GHDC sont parallèles donc $(FK) // (JL)$

Alors FKLJ est un parallélogramme

2) $L\left(0; 1; \frac{a}{2}\right)$

$\overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2}-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK}\left(? \right)$

On sait que FKLJ parallélogramme

donc $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{JL}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-1 \\ y=0 \\ z-1=\dfrac{-a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1-\dfrac{a}{2} \end{cases}$

Donc $\boxed{K\left(0;0;1-\frac{a}{2}\right)}$

$J(1;1;a)$

$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1-\frac{3a}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{FL}\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ \frac{a}{2}-1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{FL} = (-1)\times(-1) + (-1)\times 1 + \left(1-\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-1\right)$$

$$= \frac{a}{2} - 1 - \frac{3a^2}{4} + \frac{3a}{2}$$

$$= \frac{-3a^2}{4} + 2a - 1$$

FKLJ losange $\quad \underline{0<a<1}$

$\Leftrightarrow (FL) \perp (KJ)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{FL} = 0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3a^2}{4} + 2a - 1 = 0$

$\Delta = 1$

$\begin{cases} a_1 = \dfrac{-2-1}{-3/2} = -3\times\dfrac{2}{(-3)} = \cancel{2} > 1 \\ a_2 = \dfrac{-2+1}{-3/2} = -1\times\dfrac{2}{(-3)} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\boxed{\text{FKLJ est un losange pour } a = 2/3}$