Correction du dev 3 - TS

15

Ex 1 : 1) $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 4}$ $\quad \underline{n \in \mathbb{N}}$

$u_n = \dfrac{n^2\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)}$ $\quad \underline{n \neq 0}$

$\Leftrightarrow u_n = \dfrac{3 - 1/n + 1/n^2}{1 + 4/n^2}$

1,25

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty}\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 3 \\ \text{par somme} \\ \lim\left(1 + \frac{4}{n^2}\right) = 1 \end{array}\right\}$ par quotient $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3}$

2) $u_n = \dfrac{2 - \sin n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 \geq -\sin n \geq -1$

$\Leftrightarrow \quad 3 \geq 2 - \sin n \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{3}{n} \geq \dfrac{2 - \sin n}{n} \geq \dfrac{1}{n}$
$n > 0$

on a donc
$\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{3}{n}$

$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0 \end{array}\right.$

1,25

Par Encadrement $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

3) $u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{5^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$u_n = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

$-1 < \dfrac{4}{5} < 1$

$-1 < \dfrac{3}{5} < 1$

$\underline{\text{donc}}$ $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$

1,25

$\underline{\text{Par}}$ $\underline{\text{somme}}$ $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

4) $u_n = 1 - \dfrac{1}{4} + \dots + \left(\dfrac{-1}{4}\right)^n = \dfrac{1 - \left(-1/4\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{-1}{4}\right)} = \dfrac{1 - \left(\frac{-1}{4}\right)^{n+1}}{5/4}$

$\Leftrightarrow u_n = \dfrac{4}{5}\left(1 - \left(\dfrac{-1}{4}\right)^{n+1}\right)$

$-1 < -\dfrac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{-1}{4}\right)^{n+1} = 0$

1,25

Par Somme et produit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{4}{5}}$

Ex 2 : 1) $\boxed{u_0 = 3\,000}$ 3 000 contacts au 1er/06/17

$u_1 = (u_0 + 80) - \frac{5}{100}(u_0 + 80)$

0,5

Baisse de 5% entre le 1/11 et le 31/05/18

entre le 1er/06 et le 31/10/17

donc $u_1 = 0,95 \times 3080 = 2\,926$ (nb de contacts au 1er/06/18)

2) de même, $\boxed{u_{n+1}} = (u_n + 80) \times 0,95 = \boxed{0,95\,u_n + 76}$

$n \in \mathbb{N}$

0,25

3) ⓐ on veut montrer par récurrence que $u_n \geq 1\,520$ pour $n \in \mathbb{N}$

- initialisation : pour $n = 0$ $u_0 = 3\,000$ et $3\,000 \geq 1\,520$ vérifié 0,5

- hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ ~~tel~~ que $u_k \geq 1\,520$

alors $0,95\,u_k \geq 0,95 \times 1\,520$

$\Rightarrow 0,95\,u_k + 76 \geq 1\,444 + 76$ 0,75

$\Rightarrow u_{k+1} \geq 1\,520$ vrai au rang $(k+1)$

- conclusion : c'est vrai pour $n = 0$ et c'est héréditaire 0,25

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1520$

ⓑ $u_{n+1} - u_n = 0,95\,u_n + 76 - u_n = 76 - 0,05\,u_n$

$u_n \geq 1\,520 \Leftrightarrow -0,05\,u_n \leq -76 \Leftrightarrow 76 - 0,05\,u_n \leq 0$

par produit

donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante 1

ⓒ (u_n) est décroissante et minorée par $1\,520$

donc elle converge (par théorème) 0,5

4) $\boxed{v_n = u_n - 1\,520}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $v_{n+1} = u_{n+1} - 1\,520 = 0,95\,u_n + 76 - 1\,520$

$= 0,95\,u_n - 1\,444 = 0,95(u_n - 1\,520) = 0,95\,v_n$

$(n \in \mathbb{N})$

de plus $v_0 = u_0 - 1\,520 = 1\,480$ 0,5

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$ de 1er terme $v_0 = 1480$ 0,5

ⓑ alors $v_n = v_0 \times q^n = 1\,480 \times 0,95^n$

et $u_n = v_n + 1\,520 = \boxed{1\,480 \times 0,95^n + 1\,520}$ 0,5

$(n \in \mathbb{N})$

c) $-1 < 0,95 < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$ 0,5

par produit et somme $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1520}$

6) $n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 3000$
Tant que $u \geqslant 2000$
$n \leftarrow n+1$
$u \leftarrow 0,95u + 76$
fin de Tant que

0,75

7) $u_n < 2000$
$\begin{cases} u_{21} = 2024 \\ u_{22} \simeq 1999 \end{cases}$ 0,5

$2017 + 22 = 2039$

La réserve fermera en 2039

Ex 3 : $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$ sur $[0; +\infty[$

1) f dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient et somme

$f'(x) = -4 \times \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$ $\quad f'(x) > 0$ 0,75

donc f ~~strictement~~ croissante sur $[0; +\infty[$

2) $f(x) = x \iff 5 - \frac{4}{x+2} = x \iff \frac{-4}{x+2} = x - 5.$

$\iff -4 = (x-5)(x+2) \iff -4 = x^2 - 3x - 10.$

$\iff \boxed{x^2 - 3x - 6 = 0}$

1,25

$\Delta = 9 - 4 \times (-6) = 33$ $\quad$ ~~$x_1 = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}$~~ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$

$x_1 < 0$

$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \right\}$ $\quad$ donc $\alpha = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \simeq 4,37$

3) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\quad$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semble croissante et convergente vers α

4) a) on veut montrer par récurrence que (pour $n \in \mathbb{N}$)
$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

• initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ $\quad u_1 = f(u_0) = f(1) = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$

on a $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$ vrai au rang $n = 0$ $\quad (\simeq 3,67)$

• **hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$ on suppose que $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$

f strictement croissante sur $[0;+\infty[$

donc $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(\alpha)$

$\Rightarrow \quad 3 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$

1 $\Rightarrow \quad 0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$ vrai au rang $(k+1)$

• **conclusion** : on a montré par récurrence

0,25 que $\underline{0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(b) (u_n) est donc croissante et majorée par α donc convergente (par théorème) 0,5

5) $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ $(n \in \mathbb{N})$

(a) $\begin{cases} S_0 = u_0 = 1 \\ S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3} \approx 4{,}67 \\ S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = \frac{14}{3} + f\left(\frac{11}{3}\right) = 8{,}96 \end{cases}$ 1

(b) Tant que $i \leq n$ 0,25

$i \leftarrow i+1$

$u \leftarrow 5 - 4/(u+2)$ 0,25

$s \leftarrow s+u$ 0,25

fin tant que

(c) (u_n) croissante et $u_0 = 1$

donc $u_n \geq 1$ ~~pour tout~~ $n \in \mathbb{N}$

donc $S_n \geq (n+1) \times 1$ $(n+1$ termes$)$

soit $S_n \geq n+1$

or $\lim_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ 1

Par comparaison $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$