Correction du devoir n° 9 – TS

Ex 1 : (E) : $25z^2 - 14z + 25 = 0$

$(16$

1) $\Delta = 14^2 - 4\times 25^2 = -2304 = 48^2 i^2$

deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \frac{14+48i}{50} = \frac{7}{25} + \frac{24}{25}i$ et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$

$S = \{z_1 ; z_2\}$

2

2) $|z_1|^2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49+576}{625} = \frac{625}{625} = 1$

donc $|z_1| = 1 = |\bar{z}_1| = |z_2|$

1,5

3) Soit $\alpha \in]0;\pi/2[$ / $\cos\alpha = 7/25$ et $\sin\alpha = 24/25$

Puisque $|z| = 1$, on a $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$

et $z_2 = \bar{z}_1 = e^{-i\alpha}$

1,5

4) $\alpha \in]0;\pi/2[$ et $\cos\alpha < \sin\alpha$ donc $A(z_1)$ et $D(z_2)$

sont les points correspondants (symétriques

par rapport à l'axe des abscisses)

1

Ex 2 : 1) Soit $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $|z|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

donc $|z| = 1$ et $z = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = e^{i\pi/3}$ Faux

alors $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2019} = e^{i\pi/3 \times 2019} = e^{i673\pi} = e^{i(672\pi+\pi)}$ 2,5

$= e^{i\pi} = -1$

2) $z = \frac{1}{6}(2+5i)$ alors $|z|^2 = \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{4+25}{36} = \frac{29}{36}$

donc $|z| = \frac{\sqrt{29}}{6}$ or $0 < \frac{\sqrt{29}}{6} < 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |z|^n = 0$ vrai.

2

$/7$

3) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x$ $\quad$ 2,5 $\quad$ Vrai

$a \in [-\pi ; 0]$ avec $\cos(2a) = \frac{7}{25}$

Donc $2\sin^2(a) = 1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25} \Leftrightarrow \sin^2(a) = \frac{9}{25}$

$a \in [-\pi ; 0]$ donc $\sin(a) \leq 0$ Donc $\underline{\sin(a) = \frac{-3}{5}}$

Ex 3 : $Z = \frac{iz}{z-2}$ $\quad (z \neq 2)$

1) on pose $z = x + iy$ avec $(x ; y) \in \mathbb{R}$ et $(x ; y) \neq (2 ; 0)$

$Z = \frac{ix - y}{(x-2) + iy} = \frac{-y + ix}{(x-2) + iy} \times \frac{(x-2) - iy}{(x-2) - iy} = \frac{-y(x-2) + iy^2 + ix(x-2) + xy}{(x-2)^2 + y^2}$

$= \frac{2y + i(x^2 + y^2 - 2x)}{(x-2)^2 + y^2}$ $\quad \begin{cases} \operatorname{Re} Z = \frac{2y}{(x-2)^2 + y^2} \\ \operatorname{Im} Z = \frac{x^2 + y^2 - 2x}{(x-2)^2 + y^2} \end{cases}$ $\quad$ 1/7

3

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow \operatorname{Re} Z = 0 \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$\Leftrightarrow M$ est sur l'axe des abscisses privé du point $A(2)$. $\quad$ 2

3) Z réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im} Z = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$

2 $\quad \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow M(z) \in \mathscr{C}(B, 1) \setminus \{A\}$ avec $B(1 ; 0)$ ou $z_B = 1$

Bonus : 4) $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{iz}{z-2}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|iz|}{|z-2|} = 1$

$\Leftrightarrow |iz| = |z-2| \Leftrightarrow |i||z| = |z-2| \Leftrightarrow |z| = |z-2|$

$\Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M$ est sur la médiatrice de $[OA]$