Correction du devoir n° 6 Bis – TS

Ex 1 : $g(x) = 2x\ln(2x+1)$ sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ 　　B

① $g(x) = 2x \iff 2x\ln(2x+1) = 2x \iff 2x\left[\ln(2x+1) - 1\right] = 0$

$\iff 2x = 0$ ou $\ln(2x+1) = 1$ 　　1

Faux 　　$\hookrightarrow x = 0$ solution sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$

② g dérivable sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ comme composée et produit

$g'(x) = 2\ln(2x+1) + 2x \times \dfrac{2}{2x+1} = \underline{2\ln(2x+1) + \dfrac{4x}{2x+1}}$ 　　2

$g'(\frac{1}{2}) = 2\ln(1+1) + \dfrac{2}{1+1} = 2\ln 2 + 1 = \ln 2^2 + 1 = \underline{1 + \ln 4}$

coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1/2 　　Vrai

---

Ex 2 : $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$ 　　18

1) ⓐ $f(1) = 2$ car $B(1;2) \in \mathcal{C}$ 　　0,5

$f'(1) = 0$ coefficient directeur de (BC) tangente à $\mathcal{C}$ en B, or (BC) // (Ox) 　　0,75

ⓑ f dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient

$f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x}\times x - (a + b\ln x)\times 1}{x^2} = \boxed{\dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}}$ 　　0,75

ⓒ $f(1) = 2 \iff \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 2 \iff \underline{a = 2}$ 　　$(\ln 1 = 0)$ 　　0,5

$f'(1) = 0 \iff (b-a) = 0 \iff \underline{a = b = 2}$ 　　0,5

Donc $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$ et $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x^2}$ 　　0,5

2) ⓐ $\left.\begin{array}{l} 2 > 0 \\ x^2 > 0 \end{array}\right\}$ donc $f'(x)$ du signe de $\underline{-\ln x}$ 　　0,5

$-\ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 0 \iff x \leq 1$

$x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0;+\infty[$

0,5

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ par produit et somme $\lim\limits_{x\to 0^+} (2+2\ln x) = -\infty$

0,75 or $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale

0,5 $f(x) = \frac{2}{x} + 2\,\frac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ Par croissances comparées

1 et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ donc par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0}$

L'axe des abscisses est

0,5 asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

(c) <u>On en déduit</u>

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

0,75

<u>Ex 3</u> : (A) <u>$f(x) = 5\ln(x+3) - x$ sur $[0;+\infty[$</u> (9)

1) a) f dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée et somme

$f'(x) = \frac{5}{x+3} - 1 = \frac{5-(x+3)}{x+3} = \frac{2-x}{x+3}$ 1

$x \geq 0$ donc $x+3 > 0$ 0,5

$f'(x)$ est du signe de $(2-x)$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

0,5

b) <u>$x>0$</u> $x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 5\ln x - x + 5\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$

$= 5\ln x - x + 5\left(\ln(x+3) - \ln x\right)$

$= 5\ln(x+3) - x = f(x)$ 1

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{5\ln x}{x} - 1\right) = -1$ par produit et somme 0,5

Par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right) = 1$ (par somme) $X = 1+\frac{3}{x}$ $\lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0$

par Composition $\lim\limits_{x\to +\infty} 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 0$ Par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty}$

c)

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	$5\ln 3$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

$f(2) = 5\ln 5 - 2 \approx 6{,}05$
$f(0) = 5\ln 3 \approx 5{,}5$

0,75

2) a) sur $[0;2]$, f strictement croissante
avec $f(0) = 5\ln 3$ (>0)
donc $f(x) > 0$

0,75

sur $[2;+\infty[$, f continue strictement décroissante avec $f(2) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
D'après le corollaire du ~~théorème~~ de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $[2;+\infty[$

1,25

Donc une seule solution sur $[0;+\infty[$

0,25

b) $f(14) > 0$, $f(15) < 0$ donc $14 < \alpha < 15$

1

d'après la calculatrice $f(14{,}23) > 0$, $f(14{,}24) < 0$ donc $14{,}23 < \alpha < 14{,}24$
$\alpha \approx 14{,}23$ à 10^{-2} par défaut

c)

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

d'après les questions précédentes

0,5