Correction du devoir n°6 - TS

Exo 1 : $f(x) = x - \ln(1+x)$ sur $]-1;+\infty[$ 8,5

1) $\lim\limits_{x \to -1^+} (1+x) = 0^+$ $\quad X = 1+x \quad$ $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$

Par composition, produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty}$ 1

en $+\infty$, pour $x \neq 0$ $\quad f(x) = x\left(1 - \ln(1+x) \times \frac{1}{x}\right)$ 0,5

$$= x\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{x+1}{x}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ fonction rationnelle 1,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ par croissances comparées

par composition, produit, somme et produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) f dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme composée et somme

$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ $\quad x+1>0$ $\quad f'(x)$ est du signe de x 1

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) 0 est le minimum pour f sur $]-1;+\infty[$ atteint en $x=0$ donc

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$+$	

1,5

4) a) $f(x) \geq 0$ pour $x \in]-1;+\infty[$ et $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$

$\frac{1}{n} > 0$ donc $f\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \iff \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$ 1

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \iff \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

b) alors $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \iff \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$

or $x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ 1

Ex 2 : A) $f(x) = x^2 + 4\ln x$ sur $]0;+\infty[$ (11,5)

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ Par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ 1 $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$

2) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme

$\boxed{f'(x) = 2x + \frac{4}{x}}$ $x > 0$ donc $f'(x) > 0$ 0,5

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	
$f(x)$	||	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

0,5

3) Sur $]0;+\infty[$
- f continue (car dérivable)
- f strictement croissante
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0;+\infty[$ 1,5

D'après la calculatrice
$f(0,838) < 0$ donc $0,838 < \alpha < 0,839$ 0,75
$f(0,839) > 0$ donc $\boxed{\alpha \simeq 0,84}$ valeur approchée par excès

4) puisque f est strictement croissante,

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	

0,5

B) $g(x) = 2\ln x$ sur $]0;+\infty[$

1) $M(x; g(x))$ $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 = x^2 + (2\ln x)^2$
$= x^2 + 4(\ln x)^2$

donc $OM = \sqrt{x^2 + 4(\ln x)^2}$ 1,5

2) $h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2$ $(= OM^2)$ sur $]0;+\infty[$

ⓐ h dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et somme

$h'(x) = 2x + 4 \times \frac{2}{x} \times \ln x = \frac{2x^2 + 8\ln x}{x}$ 1,25

donc $h'(x) = \frac{2(x^2+4\ln x)}{x} = \frac{2f(x)}{x}$

$x>0$; $2>0$; donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$ 0,5

alors h est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$ puis strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$ 0,5

ⓑ Donc h admet un minimum sur $]0;+\infty[$ en $x=\alpha$

0,5 $h(x) = OM^2$ donc $OM = \sqrt{h(x)}$ $h(x) > 0$

0,5 or $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante

0,5 sur $[0;+\infty[$ donc le minimum pour OM

0,5 est obtenu pour $x = \alpha$

$A(\alpha; g(\alpha))$ soit $\boxed{A(\alpha; 2\ln\alpha)}$ 2

Bonus : 3) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\alpha \\ 2\ln\alpha\end{pmatrix}$

$T_A : y = g'(\alpha)(x-\alpha) + g(\alpha)$ tangente à $\mathcal{C}$ en A

$\Leftrightarrow y = \frac{2}{\alpha}(x-\alpha) + 2\ln\alpha$ $g'(x) = \frac{2}{x}$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{2}{\alpha}x - 2 + 2\ln\alpha}$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1 \\ 2/\alpha\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de T_A

$\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = \alpha + \frac{4}{\alpha}\ln\alpha$ or $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 4\ln\alpha = -\alpha^2$

$= \alpha + \frac{-\alpha^2}{\alpha} = \alpha - \alpha = 0$

donc $\overrightarrow{OA} \perp \vec{u}$ soit $T_A \perp (OA)$