Correction du dev 5 - TS

Ex 1 : $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x<2 \\ \frac{1}{2}x-2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

/3,5

1) • Sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$, f est continue comme fonctions usuelles

• en $x=2$ $\quad f(2) = \frac{1}{2}\times 2 - 2 = -1$ 0,5

et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(-2x+3) = -1$ $\Big\} =$

• donc f est continue en $x=2$ 1

alors f est continue sur $\mathbb{R}$

2) • sur $]-\infty;2[\,\cup\,]2;+\infty[$, f est dérivable comme fonctions usuelles. 0,5

• en $x=2$ $\quad T(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-2(2+h)+3-(-1)}{h} = \frac{-2h}{h} = -2$ ($h<0$)

$T(h) = \frac{\frac{1}{2}(2+h)-2-(-1)}{h} = \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \frac{1}{2}$ ($h>0$) 0,5

0,5

$\lim\limits_{h\to 0^-} T(h) = -2$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} T(h) = \frac{1}{2}$ c'est différent

donc f n'est pas dérivable en $x=2$

donc pas sur $\mathbb{R}$ 0,5

Ex 3 : $f_m(x) = x\,e^{-mx+1}$ définie dérivable sur $[0;+\infty[$ /3,5

$(m \in \mathbb{N}^*)$ $\quad f_m'(x) = 1\times e^{-mx+1} + x\times(-m)\,e^{-mx+1}$

$= (1-mx)\,e^{-mx+1}$ 0,5

$e^{-mx+1} > 0$ donc $f_m'(x)$ est du signe de $(1-mx)$ 0,25

x	0	$1/m$	$+\infty$
$f_m'(x)$	$+$	0	$-$

0,25

alors f_m est strictement croissante sur $[0;1/m]$ 0,5

puis décroissante sur $[1/m;+\infty[$

donc f_m admet un maximum en $x = 1/m$ sur $\mathbb{R}$

c'est $f_m\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}\,e^{-m\times\frac{1}{m}+1} = \frac{1}{m}$ 0,5

0,5

Ex 2 : (A) $g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2$ sur $\mathbb{R}$ 18,5

1) $g(x) = (x+2)e^{x} \times e^{-4} - 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2) = +\infty$

Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$ 0,5

2) $g(x) = x e^{x} \times e^{-4} + 2e^{x} \times e^{-4} - 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$ (croissances comparées)

Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -2}$ 1

3) g dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit et somme

$g'(x) = 1 \times e^{x-4} + (x+2)\, e^{x-4} = \boxed{e^{x-4}(x+3)}$ 0,5

$e^{x-4} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(x+3)$ 0,25

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(-3) = -1 \times e^{-7} - 2$

$= -e^{-7} - 2$

$\simeq -2{,}00$ 0,5

4) • Sur $]-\infty ; -3]$, g ~~strictement~~ décroissante avec $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -2$ donc $g(x) < 0$ 0,5

• sur $[-3 ; +\infty[$, g continue (car dérivable), ~~strictement~~ croissante avec $g(-3) \simeq -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$0 \in [g(-3) ; +\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[-3 ; +\infty[$ 1

• Au total, une seule solution sur $\mathbb{R}$ 0,25

5) Donc

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

D'après la calculatrice

$g(3{,}069)<0$ et $g(3{,}070)>0$ donc $3{,}069 < \alpha < 3{,}070$ 0,5

B $f(x)=x^2-x^2e^{x-4}$ sur $\mathbb{R}$

1) $f(x)=0 \iff x^2(1-e^{x-4})=0 \iff x^2=0$ ou $e^{x-4}=1=e^0$

$\iff x=0$ ou $x-4=0$ $\quad S=\{0\,;4\}$ 0,75

$\iff x=0$ ou $x=4$

2) f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit, et somme

$f'(x)=2x-(2xe^{x-4}+x^2e^{x-4})=2x-2xe^{x-4}-x^2e^{x-4}$

$=x(2-2e^{x-4}-xe^{x-4})$

$=x(2-(x+2)e^{x-4})=-x\,g(x)$ 0,75

3)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

f décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]\alpha;+\infty[$

f croissante sur $[0;\alpha]$ 0,75

4) donc f admet un maximum sur $[0;+\infty[$ atteint en $x=\alpha$, c'est $f(\alpha)=\alpha^2-\alpha^2e^{\alpha-4}$ 0,75

or $g(\alpha)=0 \iff (\alpha+2)e^{\alpha-4}=2 \iff e^{\alpha-4}=\dfrac{2}{\alpha+2}$

donc $f(\alpha)=\alpha^2-\alpha^2\times\dfrac{2}{\alpha+2}=\dfrac{\alpha^2(\alpha+2)-2\alpha^2}{\alpha+2}=\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$

---

3) On cherche à résoudre $p(x)\geqslant 0{,}95$

Ex4 soit $\dfrac{1}{1+e^{-0{,}2x}}\geqslant 0{,}95$

$x\mapsto 1/x$ strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$\iff 1+e^{-0{,}2x}\leqslant \dfrac{1}{0{,}95}$

$\iff e^{-0{,}2x}\leqslant \dfrac{1}{0{,}95}-1$ 1

$\iff -0{,}2x\leqslant \ln\left(\dfrac{1}{0{,}95}-1\right) \iff \boxed{x\geqslant \underbrace{-5\ln\left(\dfrac{1}{0{,}95}-1\right)}_{\simeq 14{,}7}}$

année 2014

Le marché est saturé en 2015 plus précisément au cours de

Ex 4 : A $f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}$ sur $[0;+\infty[$

1) $A(0;0,5) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{1+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$

donc $f(x) = \frac{1}{1+e^{-bx}}$

0,75

2) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée, somme et quotient $f = \frac{1}{v}$ $f' = \frac{-v'}{v^2}$

6

$f'(x) = \frac{-(-b)e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2} = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$

0,75

3) (AB) tangente à $\mathcal{C}_f$ en A a pour coefficient directeur $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0,5}{10-0} = \frac{0,5}{10} = \frac{1}{20}$

1

$f'(0) = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{b}{(1+1)^2} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{b}{4} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow b = \frac{1}{5} = 0,2$

donc $f(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}$

B $p(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}$ $(= f(x))$ sur $[0;+\infty[$ proportion d'individus qui possèdent un certain équipement

x le nombre d'années depuis le 01/01/00

1) $p(10) = \frac{1}{1+e^{-2}} \approx 0,88$ proportion au 01/01/10

0,5

2) a $p'(x) = \frac{0,2\, e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}$ $\left.\begin{array}{l} e^{-0,2x} > 0 \\ (1+e^{-0,2x})^2 > 0 \\ 0,2 > 0 \end{array}\right\}$ donc $p'(x) > 0$

0,25 x 3

0,75

donc p strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} (-0,2x) = -\infty$

$X = -0,2x$ $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ $\Bigg\}$ Par composée somme et quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = 1$

0,75

c Sur un long terme, la proportion tend vers 1 c'est-à-dire ~~100%~~ de la population serait équipée

0,5