Correction du devoir n°2 - TS

Ex 1 : $f(x) = \cos^3(x) - \sin^3(x)$ sur $\mathbb{R}$ 1,75

1) $f(-x) = \cos^3(-x) - \sin^3(-x) = (\cos(x))^3 - (-\sin(x))^3$

0,75 $= \cos^3(x) + \sin^3(x) \neq f(x)$

$\neq -f(x)$

f n'est ni paire ni impaire

2) $f(x+2\pi) = \cos^3(x+2\pi) - \sin^3(x+2\pi) = \cos^3(x) - \sin^3(x) = f(x)$

0,75 $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π-périodiques et f aussi.

3) ⓐ $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$x \in \mathbb{R}$ $= \sqrt{2}\left(\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1 $= \cos x + \sin x$

ⓑ f dérivable comme composée et somme

$f'(x) = 3\cos^2(x) \times (-\sin x) - 3\sin^2(x) \times \cos x$

$= -3\cos(x)\sin(x)(\cos x + \sin x)$

$= -3\cos(x)\sin(x) \times \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

1,5 $= -3\sqrt{2}\cos x \sin x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

x	$-\pi$	$-\pi/4$	$3\pi/4$	π
$x - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$

$\cos(x - \frac{\pi}{4})$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où le tableau de signes suivant

1

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$-3\sqrt{2}$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$\cos x$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$\sin x$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0
$\cos(x - \frac{\pi}{4})$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

1,5

4) On en déduit les variations de f

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$-\pi/4$		0		$\pi/2$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f(x)$			1				1				$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
		↗		↘		↗		↘		↗		↘	
	-1				$\frac{\sqrt{2}}{2}$				-1				-1

1

Devoir n°2 - Fonctions trigonométriques - Suites - TS

7 octobre 2019 - 1h15

Exercice 1 (7,5 pts) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3(x) - \sin^3(x)$.

1. Etudier la parité de la fonction f (paire, impaire, ni l'un ni l'autre ?)
2. Montrer que la fonction f est 2π-périodique.
3. a) Montrer que pour tout réel x, on a : $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x + \sin x$.

   b) Montrer que $f'(x) = -3\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)\cos(x - \frac{\pi}{4})$.

   c) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-\pi;\pi]$.

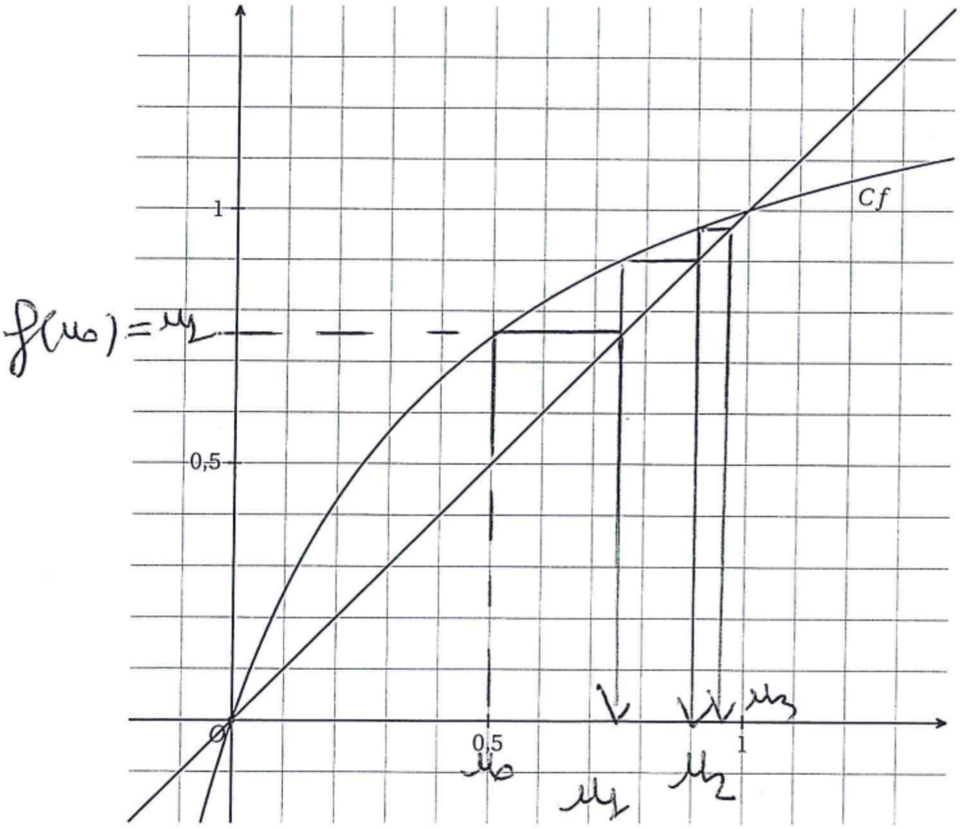
Exercice 2 (12,5 pts) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} = f(u_n)$$

où f est la fonction définie $]\frac{-1}{2};+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

Sur le graphique sont représentées la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$.



1. a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0, puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n).
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.
3. a) Etudier les variations de la fonction f.

   b) Démontrer par récurrence la variation observée de la suite (u_n).
4. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

   b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

   d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Ex2 $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n} = f(u_n) \end{cases}$ $n\in\mathbb{N})$ avec $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$ sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$

1,5

1) a) graphique

5 b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble croissante et converger vers 1

2) on veut montrer que $0 < u_n < 1$ pour $n\in\mathbb{N}$ 1

- initialisation : pour $n=0$ $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$ c'est vérifié
- hérédité : soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $0 < u_k < 1$

5 on veut montrer que $0 < u_{k+1} < 1$

or $u_{k+1} = \frac{3u_k}{1+2u_k}$ $u_k > 0$ donc $\left.\begin{matrix} 3u_k > 0 \\ 1+2u_k > 0 \end{matrix}\right\}$

5 Par quotient $u_{k+1} > 0$ 3,25

$u_{k+1} - 1 = \frac{3u_k}{1+2u_k} - 1 = \frac{3u_k - (1+2u_k)}{1+2u_k} = \frac{u_k - 1}{1+2u_k}$

$u_k < 1 \Rightarrow u_k - 1 < 0$

Par quotient $u_{k+1} - 1 < 0$ soit $u_{k+1} \leq 1$ vrai au rang $k+1$

- Conclusion : c'est vrai pour $n=0$, c'est héréditaire

5 donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $0 < u_n < 1$

3) a) f dérivable sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ comme quotient

$f'(x) = \frac{3(1+2x) - 3x\times 2}{(1+2x)^2} = \frac{3}{(1+2x)^2}$

1,5

$f'(x) > 0$ donc f ~~strictement~~ croissante sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$

5 on veut montrer que $u_n \leq u_{n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$

- pour $n=0$: $u_0 = \frac{1}{2}$ $u_1 = \frac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$

2,25

$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ donc $u_0 < u_1$

c'est vérifié

0,5 • **hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$ ~~tel~~ que $u_k \leq u_{k+1}$

0,75 f ~~strictement~~ croissante donc $f(u_k) \leq f(u_{k+1})$

soit $u_{k+1} \leq u_{k+2}$ vrai au rang $k+1$

0,5 • **conclusion** : on a montré par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

4) $\boxed{v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}}$ $(n \in \mathbb{N})$

(a) $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{\cancel{1+2u_n}} \times \frac{\cancel{1+2u_n}}{1-u_n}$$

1,5

$n \in \mathbb{N}$

1,25

$$= \frac{3u_n}{1-u_n} = 3 \times \frac{u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

0,25 $v_0 = \dfrac{1/2}{1-1/2} = \dfrac{1/2}{1/2} = 1$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 de premier terme $v_0 = 1$ 0,25

(b) $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$ 0,25 0,5

(c) $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \iff v_n - v_n u_n = u_n \iff v_n = (1+v_n)u_n$

$\iff u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$

D'où $\boxed{u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ 1

(d) $u_n = \dfrac{3^n \times 1}{3^n \times \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ 1,5

$-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$

par somme puis quotient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$