TS - Correction du devoir n°1 - 2d deg, Trigo

Ex 1 : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$ /4,5

1) $P(1) = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$ 1 est racine de P

donc $P(x) = (x-1)(2x^2 + bx - 1) \quad b \in \mathbb{R}$

$$= 2x^3 + bx^2 - x$$
$$\quad - 2x^2 - bx + 1$$
$$= 2x^3 + (b-2)x^2 + (-1-b) + 1$$

par identification 2,5

$$\begin{cases} b - 2 = -1 \\ -1 - b = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ -1 - 1 = -2 \text{ vérifié} \end{cases}$$

Donc $\boxed{P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 1)}$

2) $P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 1) = (x-1)(x+1)(2x-1)$

-1 est racine évidente

x	$-\infty$		-1		$1/2$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2

$a = 2 \quad a > 0$ du signe de a à l'extérieur des racines

$P(x) \leq 0 \quad \boxed{S = \left]-\infty ; -1\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; 1\right]}$

Ex 2 : 1) $x \in \mathbb{R}^+ \quad 3x + 11\sqrt{x} - 4 = 0$ /4,5

on pose $X = \sqrt{x} \quad X \in \mathbb{R}^+$ 2

l'équation devient $3X^2 + 11X - 4 = 0$

$\Delta = 169 \quad \sqrt{\Delta} = 13 \quad X_1 = \frac{-11+13}{6} = \frac{1}{3}$ et $X_2 = \frac{-11-13}{6} = -4$ ne convient pas

donc $\sqrt{x} = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{9} \quad \boxed{S = \left\{\frac{1}{9}\right\}}$

2) sur $[0 ; 2\pi[\quad 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

On pose $X = \cos x \quad X \in [-1 ; 1]$

L'équation devient $2X^2 - 3X + 1 = 0 \iff (X-1)(2X-1)$

Soit $\iff X = 1$ ou $X = +1/2$

$\cos x = 1$ ou $\cos x = +1/2 \quad \boxed{S = \left\{0 ; \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right\}}$ 2,5

Ex3 : $(E_m) : mx + (2m-1)x + 1 = 0$ $m \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

* $\underline{m=0}$, $(E_0) : -x+1=0$ $S=\{+1\}$ une seule solution
* $\underline{m \neq 0}$ (E_m) est du second degré

$\Delta_m = (2m-1)^2 - 4m = 4m^2 - 8m + 1$

$\Delta = 48$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ $\begin{cases} m_1 = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \\ m_2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

m	$-\infty$		0		$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
Δ_m ($a=4$)		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

2

pour $m<0$ ou $0<m<\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ou $m>\frac{2+\sqrt{3}}{2}$: 2 solutions

pour $m = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ou $m = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$: une seule solution

pour $\frac{2-\sqrt{3}}{2} < m < \frac{2+\sqrt{3}}{2}$: pas de solution

---

Ex4 : 1) dans $]-\pi;\pi]$ $\sin(2x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\iff 2x = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{-\pi}{4} + 2k'\pi$ ($k, k' \in \mathbb{Z}$)

$\iff x = \frac{-3\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{-\pi}{8} + k'\pi$

$S = \left\{\frac{-3\pi}{8}; \frac{-\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right\}$ 2

4,5

2) dans $]-\pi;\pi]$, $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ $S = \left]-\pi; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ 1

3) dans $[0; 2\pi[$, $4\cos^2 x \leq 3 \iff \frac{-\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$ 1,5

Ex5 : $\sin x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ avec $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\boxed{\cos x \geq 0}$ 0,5

- $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ donc $\boxed{\cos x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$ N

3,5

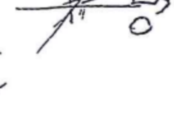
- $\sin(2x) = 2\cos x \sin x = \cancel{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\cancel{2}} \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{4-3}}{2} = \frac{1}{2}$ N

$0 \leq 2x \leq \pi$

alors $2x = \frac{\pi}{6}$ ou $2x = \frac{5\pi}{6}$ d'où $x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12}$

N

$2-\sqrt{3} < 2+\sqrt{3}$ donc $\cos x < \sin x$



Donc $x = \frac{5\pi}{12}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante sur $[0; +\infty[$