Correction du devoir n°10 - TS

Ex 1 : 1) $f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^{2020}}$ sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$

$f(x) = (2x-1)^{-2020} = \dfrac{1}{2} \times \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{(2x-1)^{-2020}}_{u}$

$(k \in \mathbb{R})$ $F(x) = \dfrac{1}{2} \, \dfrac{(2x-1)^{-2019}}{-2019} + k = \boxed{\dfrac{-1}{4038} \times \dfrac{1}{(2x-1)^{2019}} + k}$

les primitives de f sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$

2) $g(x) = \dfrac{x-2}{(-x^2+4x-3)^2}$ sur $]1 ; 3[$

$$\begin{cases} u(x) = -x^2+4x-3 \\ u'(x) = -2x+4 \\ = -2(x-2) \end{cases}$$

$g = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u^2}$ donc $G = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{u} + k$ $(k \in \mathbb{R})$

$\boxed{G(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{-x^2+4x-3} + k}$ les primitives de g sur $]1 ; 3[$.

Ex 2 : $I = \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx \underset{\text{par linéarité}}{=} 3 \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$

donc $I = 3 \left[\sqrt{x^2+1} \right]_{-1}^{\sqrt{3}} = \boxed{3\left(2 - \sqrt{2}\right)}$

$J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} \, dx$

$u(x) = 1 + 2\sin x$
$u'(x) = 2\cos x$
$1 + 2\sin x > 0$

donc $J = \left[\dfrac{1}{2} \ln(1 + 2\sin x) \right]_0^{\pi/2} = \boxed{\dfrac{1}{2} \ln 3}$

Ex 3 $f_m(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$ sur $[1;5]$ et $I_m = \int_1^5 f_m(x)\,dx$

$m \in \mathbb{N}^*$

1) d'après la calculatrice, $\mathcal{C}_1$ violette, $\mathcal{C}_2$ rouge, $\mathcal{C}_3$ orange et $\mathcal{C}_4$ bleue clair

2) pour $m \in \mathbb{N}^*$, f_m continue positive sur $[1;5]$ $1<5$ donc I_m est l'aire en u.a. du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_m$, les droites d'équations $x=1$ et $x=5$

$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant f_3(x) \geqslant f_4(x)$ sur $[1;5]$
donc les aires diminuent.

Il semble que $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et converge vers 0.

3) $I_1 = \int_1^5 f_1(x)\,dx = \int_1^5 \dfrac{\ln x}{x}\,dx$ $\qquad \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u' \cdot u$

$= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^5 = \boxed{\frac{1}{2}(\ln 5)^2}$ u.a.

4) f_m dérivable sur $[1;5]$ comme quotient

$f_m'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x^n - \ln x \times n x^{n-1}}{(x^n)^2} = \dfrac{x^{n-1}(1 - n\ln x)}{x^n \times x^n}$

donc $\boxed{f_m'(x) = \dfrac{1 - m\ln x}{x^{m+1}}}$

5) On admet que f_m admet un maximum sur $[1;5]$ $(m \in \mathbb{N}^*)$

$f_m'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - m\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = e^{1/m}$

$f_m(e^{1/m}) = \dfrac{\ln(e^{1/m})}{(e^{1/m})^m} = \dfrac{1/m}{e} = \dfrac{1}{em}$

donc $\boxed{A_m\left(e^{1/m}; \frac{1}{em}\right)}$ $\qquad \Gamma : y = \frac{1}{e}\ln x$

$\frac{1}{e}\ln(x_{A_m}) = \frac{1}{e}\ln(e^{1/m}) = \frac{1}{e}\times\frac{1}{m} = y_{A_m}$

donc $\boxed{A_m \in \Gamma}$ $(m \in \mathbb{N}^*)$

6) sur $[1;5]$ $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{n+1}} - \frac{\ln x}{x^n}$

ⓐ $n \in \mathbb{N}^*$

$= \frac{\ln x}{x^n}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{\ln x}{x^n} \times \frac{1-x}{x}$

$\ln x \geq 0$ $\quad = \frac{\ln x}{x^{n+1}}(1-x)$

$x^{n+1} > 0$

et $1 - x \leq 0$ donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{f_{n+1}(x) \leq f_n(x)}$

ⓑ f_n continue sur $[1;5]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ Par passage à l'intégrale

et $1 < 5$ dans l'inégalité

on a $\int_1^5 f_{n+1}(x)\,dx \leq \int_1^5 f_n(x)\,dx \Leftrightarrow \boxed{I_{n+1} \leq I_n}$

donc (I_n) est décroissante

7) ⓐ $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$ $\quad 1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln 5$

$x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln 5 \Leftrightarrow \boxed{0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{\ln 5}{x^n}}$ $\quad x^n > 0$

ⓑ $\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^5 x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^5 = \frac{5^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}$

$= \frac{1}{-n+1} \times \frac{1}{5^{n-1}} - \frac{1}{-n+1} = \frac{1}{-n+1}\left(\frac{1}{5^{n-1}} - 1\right)$

$= \boxed{\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$

ⓒ $0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{\ln 5}{x^n}$ $\quad f_n$ et $x \mapsto \frac{\ln 5}{x^n}$ continues

sur $[1;5]$ $\quad 1 < 5$ Par passage à l'intégrale

on obtient $0 \leq I_n \leq (\ln 5)\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx$

donc $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{\ln 5}{(n-1)}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$

8) (I_n) est décroissante et minorée par 0

donc par théorème convergente

$5 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^{n-1} = +\infty$ $\quad$ Par Encadrement

Par Quotient, Somme et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln 5}{(n-1)}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$ $\quad \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$