Correction du devoir n°8 - TS

Ex 1 : **Aff 1 :** $\frac{\pi}{3}$ est un argument de $(-\sqrt{3}+i)^8$?

soit $z = -\sqrt{3}+i$ $\quad |z|^2 = 3+1 = 4 \iff |z| = 2$

alors $z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{5i\pi/6}$ $\quad \arg z = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$

$\arg(-\sqrt{3}+i)^8 = \arg z^8\ (2\pi) = 8\arg z\ (2\pi)$

$= 8\times\frac{5\pi}{6}\ (2\pi) = \frac{20\pi}{3}\ (2\pi) = \frac{20\pi}{3} - \frac{18\pi}{3}\ (2\pi)$

/2,5

$= \frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ Affirmation fausse

Aff 2 : $\begin{cases} z_A = \sqrt{2}+3i \\ z_B = 1+i \\ z_C = i\sqrt{2} \end{cases}$ A, B, C ne sont pas alignés ?

/2,5

$\begin{cases} z_A - z_B = (\sqrt{2}-1)+2i \\ z_B - z_C = 1+(1-\sqrt{2})i \end{cases}$

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\quad (\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2}) - 2 = (\sqrt{2})^2 - 1 - 2 = -1$

$-1 \neq 0$ $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$ non colinéaires

donc A, B, C non alignés VRAI

Aff 3 : $(E) : (z-1)(z^2-8z+25) = 0$ $(z \in \mathbb{C})$ /5

$(E) \iff z = 1$ ou $z^2 - 8z + 25 = 0$

soit $z^2 - 8z + 25 = 0$ $\quad \begin{cases} z_1 = \frac{8+6i}{2} = 4+3i \\ z_2 = \bar{z}_1 = 4-3i \end{cases}$

$\Delta = -36 = 36i^2$

→ 2,5

$S = \{1 ; 4-3i ; 4+3i\}$

soient $I(1)$, $A(4-3i)$ et $B(4+3i)$

$z_2 = \bar{z}_1$ donc $|z_2| = |z_1| \iff OA = OB$ et $I \in (O\vec{u})$

donc A et B symétriques par rapport à (OI) 1

donc $\boxed{IA = IB}$ $\quad z_A - z_I = 3-3i$ et $z_B - z_I = 3+3i$

$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = 3\times3 - 3\times3 = 0$ 1,5

$\iff \boxed{(IA) \perp (IB)}$ VRAI

le triangle AIB est rectangle isocèle en I.

Ex 2 : $M(z) \longmapsto M'(f(z))$ / $f(z) = z + \frac{1}{z}$
$z \in \mathbb{C}^*$

1) $A(a)$ $\quad a = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $|a|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$ donc $|a| = 1$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \sqrt{2}/2 \end{cases}$ donc $\theta = \arg a \ (2\pi) = \frac{3\pi}{4} \ (2\pi)$

alors $\boxed{a = e^{3i\pi/4}}$ $\quad$ 1

b) $f(a) = a + \frac{1}{a} = e^{3i\pi/4} + e^{-3i\pi/4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$

donc $f(a) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ $\quad$ 1

2) $z \in \mathbb{C}^*$ $\quad f(z) = 1 \iff z + \frac{1}{z} = 1 \iff \frac{z^2 + 1 - z}{z} = 0$

$\iff z^2 - z + 1 = 0 \qquad \Delta = -3 = 3i^2$

$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ $\qquad S = \{z_1 ; z_2\}$ $\quad$ 2

3) $M(z) \in \mathscr{C}(O;1)$

a) alors $OM = 1 \iff |z| = 1$ donc $z = 1 \times e^{i\theta} = e^{i\theta}$ $\quad$ 0,5
avec $\theta = \arg z \ (2\pi)$

b) $f(z) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
$= \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta.$

$f(z) \in \mathbb{R}$ $\quad$ 1,5

4) Soit $M(z)$ / $z = x + iy$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$
$z \neq 0$

$f(z) = (x + iy) + \frac{1}{x + iy} \times \frac{x - iy}{x - iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow f(z) = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ $\quad$ 1,5

$f(z) \in \mathbb{R} \iff y = \frac{y}{x^2 + y^2} \iff y(x^2 + y^2) - y = 0$

$\iff y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$ $\quad$ 1,5

$M(z) \in \mathscr{D} : y = 0$ privée de O ou à $\mathscr{C}(O;1)$