Correction du devoir n° 7 - TS

Ex 1 : $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{5x}\right)$ $f = \ln u$ avec $u(x) = \frac{3x+2}{5x}$

1)

x		$-2/3$		0	
$3x+2$	$-$	0	$+$	|	$+$
$5x$	$-$	|	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+$	0	$-$	||	$+$

f est définie pour $u(x) > 0$

donc $\mathcal{D} =]-\infty ; -\frac{2}{3}[\cup]0 ; +\infty[$

or $\ln(3x+2) - \ln x - 5$
est défini pour $3x+2>0$ et $x>0$
1,5 donc sur $]0;+\infty[$

Alors $f(x) \neq \ln(3x+2) - \ln x - 5$ Faux

3) $f = \ln u$ $u'(x) = \frac{3\times 5x - (3x+2)\times 5}{(5x)^2} = \frac{-10}{25x^2} = \frac{-2}{5x^2}$

$f' = \frac{u'}{u}$

donc $f'(x) = \frac{-2/5x^2}{\frac{3x+2}{5x}} = \frac{-2}{5x^2} \times \frac{5x}{3x+2}$

2

soit $\boxed{f'(x) = \frac{-2}{(3x+2)x}}$ faux

2) $f(x) = 0 \iff \ln\left(\frac{3x+2}{5x}\right) = 0 \iff \frac{3x+2}{5x} = 1$

$x \mapsto \ln x$
continue strictement croissante sur $]0;+\infty$

$\iff 3x+2 = 5x$

1,5 $\iff 2 = 2x$

$\iff x = 1$ $S = \{1\}$ VRAI

/6,5

4) en $A(1;0)$ $y = f'(1)\times(x-1) + f(1)$

$f'(1) = \frac{-2}{5}$ $y = \frac{-2}{5}(x-1)$

1,5 $\boxed{y = \frac{-2}{5}x + \frac{2}{5}}$

Ex2 : (A) $f(x) = ax + (bx+c)\ln x$ sur $]0;+\infty[$ $a,b,c \in \mathbb{R}$

$A(1;2)$ et $B(\frac{1}{2}; 1+\frac{1}{2}\ln 2) \in \mathcal{C}$
et la tangente à $\mathcal{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses 0,5

donc $f(1) = 2 \iff a + (b+c)\ln 1 = 2 \iff a = 2$ 0,5

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln 2 \iff \frac{a}{2} + \left(\frac{b}{2}+c\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln 2$

$\iff 1 - \left(\frac{b}{2}+c\right)\ln 2 = 1 + \frac{1}{2}\ln 2$ 0,75

$\iff -\left(\frac{b}{2}+c\right) = \frac{1}{2} \iff \boxed{b + 2c = -1}$

f dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme

$f'(x) = a + b\ln x + \frac{bx+c}{x} = 2 + b\ln x + \frac{bx+c}{x}$ 0,5

on a $f'(1) = 0 \iff 2 + b\ln 1 + b + c = 0$ 0,75

$\iff \boxed{b + c = -2}$

$\begin{cases} b + 2c = -1 & (1) \\ b + c = -2 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ donc $\boxed{f(x) = 2x + (1-3x)\ln x}$

0,5

(B) Soit $g(x) = 2x + (1-3x)\ln x = f(x)$ sur $]0;+\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} (1-3x) = 1$ | Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty}$ 0,75

l'axe des ordonnées est asymptote verticale à $\mathcal{C}_g$ 0,5

• $g(x) = x\left(2 + \left(\frac{1-3x}{x}\right)\ln x\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-3x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -3 = -3$ fonction rationnelle

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ Par produit et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \left(\frac{1-3x}{x}\right)\ln x = -\infty$

par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$ 0,75

2) ⓐ g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme : $g'(x) = 2 - 3\ln x + \left(\frac{1-3x}{x}\right)$

$= \frac{1}{x} - 1 - 3\ln x$ 0,5

ⓑ g' dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme

$g''(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{3}{x}$ or $x>0$ et $x^2>0$ donc $g''(x)<0$

1,5 Alors g strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

ⓒ $g'(1) = 1-1-3\ln 1 = 0$

g' continue et strictement décroissante

1 donc

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

3) on a donc

0,5

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4) $\Delta : y = 2x$

ⓐ $g(x) = 2x \iff (1-3x)\ln x = 0 \iff 1-3x = 0$ ou $\ln x = 0$

$\iff x = 1/3$ ou $x = 1$

Δ coupe $\mathcal{C}_g$ en $A\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ et $B(1;2)$ 1,5

ⓑ $g(x) - 2x = (1-3x)\ln x$

x	0		$1/3$		1		$+\infty$
$1-3x$	$\|\|$	$+$	0	$-$		$-$	
$\ln x$	$\|\|$	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)-2x$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

1,5

sur $]0;\frac{1}{3}[$ et sur $]1;+\infty[$ $\mathcal{C}_g$ est au-dessous de Δ

sur $]\frac{1}{3};1[$, $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de Δ