Correction du devoir n° 5. TS

Ex 1 : 1) $\mathcal{C}_1$ représente f donc f décroissante sur $]-\infty ; -0{,}5]$ environ puis croissante sur $[-0{,}5 ; +\infty[$

soit

x	$-\infty$	$-0{,}5$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\mathcal{C}_2$ doit être au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty ; -0{,}5]$

1

/3

C'est la situation 1

2) $A(0 ; 2)$ $\quad \Delta : y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$ $\quad \begin{cases} f(0)=2 \\ f'(0)=1 \end{cases}$ $\quad A(0;1) \in \mathcal{C}$ $\quad B(0;1) \in \mathcal{C}_2$

0,75 donc $\Delta : \boxed{y = x+2}$

3) $f(x) = e^{-x} + ax + b$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ f dérivable comme composée et somme

1,25 $f'(x) = -e^{-x} + a$

$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} e^0 + b = 2 \\ -e^0 + a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

Donc $\boxed{f(x) = e^{-x} + 2x + 1}$

Ex 2 : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

/15,5

0,75 1) ⓐ $f_0(x) = (x+1)e^0 = x+1$ $\quad$ fonction affine

ⓑ $f_1(x) = (x+1)e^x$

$f_0(x) = f_1(x) \iff (x+1) = (x+1)e^x \iff (x+1)(1-e^x) = 0$

$\iff x = -1$ ou $e^x = 1$

$\iff x = -1$ ou $x = 0$

$f_0(0) = f_1(0) = 1$ et $f_0(-1) = f_1(-1) = 0$

1 $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent en $A(0 ; 1)$ et en $B(-1 ; 0)$

0,5 $f_k(0) = 1 \times e^0 = 1$ et $f_k(-1) = 0 \times e^{-k} = 0$

donc A et $B \in \mathcal{C}_k$ $\quad \forall k \in \mathbb{Z}$

2)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

1,5

$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)e^{(k+1)x} - (x+1)e^{kx}$

$= (x+1)e^{kx}(e^x - 1)$ $\quad e^{kx} > 0$ sur $\mathbb{R}$

donc $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ est du signe de $(x+1)(e^x-1)$

/ sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]0 ; +\infty[$, $\mathcal{C}_{k+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_k$

sur $[-1 ; 0]$ ...

3) f_k dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit

0,5 $f_k'(x) = 1 \times e^{kx} + (x+1)e^{kx} \times k = \underline{(1+k+kx)\ e^{kx}}$

$e^{kx} > 0$ donc $f_k'(x)$ est du signe de $1+k+kx$

$f_k'(x) \geqslant 0 \iff 1+k+kx \geqslant 0 \iff kx \geqslant -1-k$

$k>0$ $\quad f_k'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{-1-k}{k}$

$k<0$ $\quad f_k'(x) \leqslant 0 \iff x \leqslant \frac{-1-k}{k}$

1 $\underline{k>0}$ f_k décroissante sur $]-\infty ; \frac{-1-k}{k}[$ puis croissante sur $[\frac{-1-k}{k} ; +\infty[$

$\underline{k=0}$ $f_0(x) = 1+x$ croissante sur $\mathbb{R}$

$\underline{k<0}$ f_k croissante sur $]-\infty ; \frac{-1-k}{k}[$ puis décroissante sur $[\frac{-1-k}{k} ; +\infty[$

4) $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$ $\rightarrow k>0$ d'après la question précédente.

$\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ $\rightarrow k<0$

0,5 d'après la question 2 position relatives $\begin{cases} \mathcal{F} \text{ correspond à } f_{-3} \text{ et } \mathcal{E} \text{ à } f_{-1} \\ \mathcal{K} \text{ correspond à } f_2 \text{ et } \mathcal{H} \text{ à } f_1 \end{cases}$

14,5

Ex3 : A $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0;1]$

$(n \in \mathbb{N})$

1) on veut montrer par récurrence que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- initialisation : pour $n=0$ $u_0 = 1$ $u_1 = f(u_0) = f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

  on a $0 \leqslant \frac{1}{e} \leqslant 1 \leqslant 1$ vrai pour $n=0$

- hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, je suppose que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1$ d'après l'énoncé f strictement croissante sur $[0;1]$

2 donc $f(0) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$

donc $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{e} \leqslant 1$

donc vrai au rang $k+1$

- conclusion : pour $n \in \mathbb{N}$ $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1}$

2) a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente

0,5

(b) soit l la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$f(x) = x \iff xe^{-x} = x \iff x(e^{-x} - 1) = 0$

$\iff x = 0$ ou $e^{-x} = 1 \iff x = 0$ ou $e^{x} = 1$

$\iff x = 0$

0,75

l est solution de $f(x) = x$ d'après l'énoncé donc $\boxed{l = 0}$

(B) $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

1,25

```
u ← 1
S ← 1
pour k de 1 à 100
  u ← u × e^(-u)
  S ← S + u
fin pour
afficher S
```

Ex4 : (A) $g(x) = e^x - x e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$ /7

1) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$ croissances comparées } Par somme $\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1}$ 0,75

$g(x) = e^x(1 - x) + 1$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$ } Par produit et somme $\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$ 0,75

2) g dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme

$g'(x) = e^x - (1 \times e^x + x e^x) = -x e^x$ 0,5

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $g'(x)$ est du signe de $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

0,5

3) (a) • sur $]-\infty; 0]$, g strictement croissante avec $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$

donc $\boxed{g(x) > 1 > 0}$ 0,5

• sur $[0; +\infty[$, g strictement décroissante

g continue (car dérivable)

$g(0) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ $\quad 0 \in]-\infty; 2]$

D'après le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution sur $[0; +\infty[$

• Au total une seule solution α sur $\mathbb{R}$ 0,25

$g(1{,}27) > 0$
$g(1{,}28) < 0$ } donc $\boxed{1{,}27 < \alpha < 1{,}28}$ 0,5

b) $g(\alpha) = 0 \iff e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0 \iff e^{\alpha}(1-\alpha) = -1$

$\iff e^{\alpha} = \dfrac{-1}{1-\alpha} \iff e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ 0,5

4) D'après les questions précédentes

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

0,5

B) $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$ définie dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme quotient

1) $A'(x) = \dfrac{4(e^x+1) - 4x e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4e^x + 4 - 4x e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{4\, g(x)}{(e^x+1)^2}$ 0,5

$4 > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$ donc $A'(x)$ est du signe de $g(x)$ 0,25

2)

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	

0,5

A est croissante sur $[0 ; \alpha[$ puis décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$

C) $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$ sur $[0 ; +\infty[$ $\quad M(x ; f(x))$, $P(x ; 0)$, $Q(0 ; f(x))$ $\quad x \geq 0$, $f(x) > 0$

1) L'aire du rectangle OPMQ s'écrit $OQ \times OP$ soit $f(x) \times x$

donc c'est $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$

d'après les variations, A admet un maximum en $x = \alpha$

2) $M(\alpha ; f(\alpha))$

(PQ) a pour coefficient directeur $a = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{f(\alpha) - 0}{0 - \alpha}$

soit $a = \dfrac{-f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{-4}{\alpha(e^{\alpha}+1)}$ or $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

donc $a = \dfrac{-4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1} + 1\right)} = \dfrac{-4}{\alpha \times \frac{\alpha}{\alpha - 1}} = \dfrac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$

la tangente (T) en M a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$

$f'(x) = \dfrac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$ donc $f'(\alpha) = \dfrac{-4e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^2} = \dfrac{-4}{\alpha - 1} \times \dfrac{1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2}$

$= \dfrac{-4(\alpha-1)^2}{\alpha^2(\alpha-1)} = \dfrac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$

$f'(\alpha) = a$ donc $\boxed{(T) // (PQ)}$