Correction du devoir n° 5 - TS

Ex 1 : Sur $\mathbb{R}$ /5

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1) • sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$, f continue comme fonctions usuelles 0,5

• en -1 $\quad f(-1) = -(-1)^2 - 2\times(-1) = -1+2 = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = 1 = f(-1)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \dfrac{1}{-1+2} = 1 = f(-1)$ 1

donc f est continue en $x=-1$ 0,25

• alors f est continue sur $\mathbb{R}$ 0,25

2) • sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, f est dérivable comme fonctions usuelles 0,5

• en -1 $\quad x<-1$ $\quad T(x) = \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{-x^2-2x-1}{x+1} = \dfrac{-(x+1)^2}{x+1}$

$\Leftrightarrow T(x) = -(x+1)$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} T(x) = 0$

$x>-1$ $\quad T(x) = \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{\frac{1}{x+2}-1}{x+1} = \dfrac{1-(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \dfrac{-x-1}{(x+2)(x+1)}$

$\Leftrightarrow T(x) = \dfrac{-1}{x+2}$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} T(x) = -1$ 2

$\lim\limits_{x\to-1^+} T(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^-} T(x)$ donc f n'est pas dérivable en $x=-1$

donc non dérivable sur $\mathbb{R}$ 0,5

Ex 2 : (A) $g(x) = -4x^3 - 3x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$

1) g dérivable sur $\mathbb{R}$ comme polynôme de degré 3

0,5 $\boxed{g'(x) = -12x^2 - 6x = -6x(2x+1)}$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-9/4$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

1

$a = -12$ du signe de a à l'extérieur des racines

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ 1

2) • Sur $[-1/2;+\infty[$, -2 est le maximum pour $g(x)$ atteint en $x=0$ donc $g(x) \leq -2 < 0$

1

• Sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$, g continue (polynôme)
g strictement décroissante
1 $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $g(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$
$0 \in]-\frac{9}{4} ; +\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs
0,5 intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$

0,25 • Donc une seule solution sur $\mathbb{R}$

0,75 $g(-1,14) > 0$
$g(-1,13) < 0$ } donc $-1,14 < \alpha < -1,13$
et $\alpha \simeq -1,14$ par défaut

0,5 3) d'après la question précédente

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

(B) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

1) f fonction rationnelle
1,5 donc $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0 \end{cases}$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$ 0,5

0,5 $\lim\limits_{x \to 1} (2x+1) = 3$
$\lim\limits_{x \to 1^-} (x^3-1) = 0^-$
$\lim\limits_{x \to 1^+} (x^3-1) = 0^+$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x^3-1	$-$	0	$+$

$x \mapsto x^3$ strictement croissante

par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty}$

0,5 La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

2) ⓐ f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme quotient $(x^3-1) \neq 0$.

$f'(x) = \dfrac{2(x^3-1) - (2x+1) \times 3x^2}{(x^3-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2 - 6x^3 - 3x^2}{(x^3-1)^2}$

1,5 $= \dfrac{-4x^3 - 3x^2 - 2}{(x^3-1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x^3-1)^2}$

ⓑ $(x^3-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

0,5

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

1

$f(\alpha) \simeq 0,5$

3) ⓐ $T: \; y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$

0,5

$\boxed{y=-2x-1}$ tangente en $A(0\,;-1)$

ⓑ $f(x)-(-2x-1) = \dfrac{2x+1}{x^3-1} + (2x+1)$

$= (2x+1)\left(\dfrac{1}{x^3-1}+1\right) = \dfrac{(2x+1)(1+x^3-1)}{x^3-1}$

$= \dfrac{(2x+1)x^3}{x^3-1}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	$\|$	$+$	
x^3-1		$-$		$-$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)-(-2x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

pour $x<-\frac{1}{2}$ et $0<x<1$ $\quad f(x)<(-2x-1)$

$\mathscr{C}$ est au-dessous strictement de (T)

pour $-\frac{1}{2}\leq x\leq 0$ et $x>1$ $\quad \mathscr{C}$ est au-dessus de (T)

Devoir n°5 - Continuité - Dérivabilité - TVI - TS

3 décembre 2018 - 1h

Exercice 1 (5 pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (15 pts) : **Partie A** : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -4x^3 - 3x^2 - 2$$

1. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2}.
3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

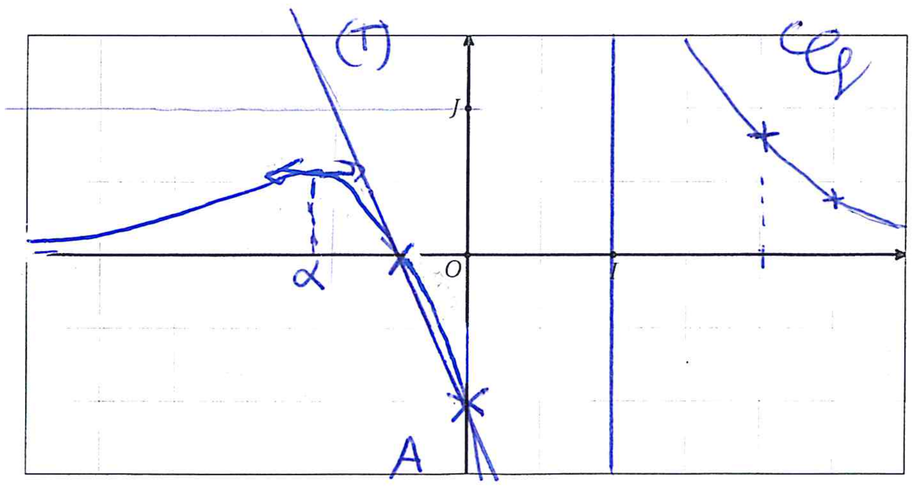
$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3 - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de I et préciser les asymptotes (s'il y a lieu).
2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3-1)^2}$.

   b) Dresser le tableau de variations de f.
3. a) Déterminer une équation de (T), tangente à $\mathcal{C}_f$ en A d'abscisse 0.

   b) Etudier la position relative de (T) et $\mathcal{C}_f$.
4. Construire $\mathcal{C}_f$, ses asymptotes et ses tangentes dans le repère ci-dessous.



+15