Devoir n°3 - Suites - TS

22 octobre 2018 - 2h

Exercice 1 (4,5 pts) : Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n^2 + 4} \quad (n \in \mathbb{N})$
2. $u_n = \dfrac{5 + \cos n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
3. $u_n = 6^n - 3^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
4. $u_n = n + 2(-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$
5. $u_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + ... + (\dfrac{-1}{3})^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 2 (5,5 pts) : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + 2u_n}$$

1. A l'aide de la calculatrice, quelles conjectures peut-on faire sur la limite et le sens de variation de la suite (u_n) ?
2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
   c) Montrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
   b) En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.
   c) Quelle est la limite de la suite (u_n)

Exercice 3 (10 points) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.
On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$ suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2{,}9$ puis pour $a = 3{,}1$.

2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   a) En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
   b) Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.

3. Dans cette question, on prend $a = 2{,}9$.
   a) Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4. Dans cette question, on prend $a = 3{,}1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
   a) À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
   b) En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) L'algorithme suivant calcule et affiche le plus petit rang p tel que $u_p > 10^6$.
   Compléter cet algorithme.
   P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```
P ← 0
U ......

Tant que ...
    P ← .........
    U ← .........
Fin Tant que

Afficher ......
```