Correction du devoir n°3 TS

Ex 1 : $(n \in \mathbb{N})$

1) $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n^2+4} \underset{n \neq 0}{=} \dfrac{n^2(2 - 1/n^2)}{n^2(3 + 4/n^2)} = \dfrac{2 - 1/n^2}{3 + 4/n^2}$

Par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} (2 - \frac{1}{n^2}) = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (3 + \frac{4}{n^2}) = 3$

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2/3}$ 1

2) $(n \in \mathbb{N}^*)$ $u_n = \dfrac{5 + \cos n}{n}$

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$\Rightarrow 4 \leq 5 + \cos n \leq 6$

$\Rightarrow \frac{4}{n} \leq u_n \leq 6/n$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{4}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6}{n} = 0$ Par Encadrement 1

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

3) $u_n = 6^n - 3^{2n} = 6^n - 9^n = 6^n\left(1 - \left(\frac{9}{6}\right)^n\right) = 6^n\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$

$(n \in \mathbb{N}^*)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} 6^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ car $6 > 1$ et $3/2 > 1$

Par somme et produit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$ 0,75

4) $u_n = n + 2(-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$\Rightarrow n - 2 \leq u_n \leq n + 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n-2) = +\infty$ et $n - 2 \leq u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ 0,75

Par Comparaison $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

5) $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \dfrac{1 - (-1/3)^{n+1}}{1 - (-1/3)}$ $n \in \mathbb{N}^*$

$= \dfrac{1 - (-1/3)^{n+1}}{4/3} = \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$-1 < \frac{-1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} = 0$ 1

Par somme et produit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3/4}$

Exo 2 : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3+2u_n} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ 16

1) Il semble que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et converge vers 0. 0,5

2) @ On veut montrer que $\underline{u_n > 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$ 0,25

- pour $n = 0$ $u_0 = 3$ $3 > 0$ vrai 0,25
- soit $k \in \mathbb{N}$, je suppose que $u_k > 0$ 0,25
on veut montrer que $u_{k+1} > 0$

$u_k > 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3u_k > 0 \\ \text{et } 3+2u_k > 0 \end{matrix}\right\}$ donc $u_{k+1} > 0$ vrai pour $k+1$ 1,5

- el est vrai pour $n = 0$ et héréditaire 0,25
donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underline{u_n > 0}$

ⓑ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n}{3+2u_n} - u_n = \dfrac{3u_n - (3+2u_n)u_n}{3+2u_n}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2u_n^2}{3+2u_n}$ $\left.\begin{matrix} 3+2u_n > 0 \\ -2u_n^2 < 0 \end{matrix}\right\}$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante 0,75

ⓒ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par 0
donc Convergente 0,5

3) $\boxed{v_n = \dfrac{3}{u_n}}$ $(n \in \mathbb{N})$

@ $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{u_{n+1}} - \dfrac{3}{u_n} = \dfrac{3}{\frac{3u_n}{3+2u_n}} - \dfrac{3}{u_n}$ 1

$= \dfrac{3(3+2u_n)}{3u_n} - \dfrac{3}{u_n} = \dfrac{3(3+2u_n) - 9}{3u_n} = \dfrac{6u_n}{3u_n} = 2$

$v_0 = \dfrac{3}{u_0} = 1$

(v_n) est une suite arithmétique
de raison 2, de 1er terme $v_0 = 1$ 0,75

ⓑ alors $v_n = 1 + 2n$ et $u_n = \dfrac{3}{v_n} = \dfrac{3}{1+2n}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓒ $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+2n) = +\infty$ $\underline{\text{Par Quotient}}$ $\lim u_n = 0$ 0,5

/10

Ex 3 : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_0 = a & (a \in \mathbb{R}^+) \\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2} & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) pour $a = 2{,}9$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble converger vers 1 et décroissante
pour $a = 3{,}1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble avoir pour limite $+\infty$ et croissante

0,5
0,5 variations

2) Supposons que (u_n) converge vers l $(l \in \mathbb{R})$

ⓐ on a $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$

la limite étant unique, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

0,5 or, par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{1}{2}l^2 - l + \frac{3}{2}$

Donc l vérifie : $\underline{l = \frac{1}{2}l^2 - l + \frac{3}{2}}$

ⓑ $x = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$

1 $\Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 3$ $\quad S = \{1;3\}$

$\Leftrightarrow 0 = (x-1)(x-3)$ $\quad$ Donc $\boxed{l = 1 \text{ ou } l = 3}$

3) $\boxed{u_0 = 2{,}9}$

ⓐ f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x - 1$

1 pour $x \geqslant 1$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f croissante sur $[1;+\infty[$

ⓑ On veut montrer que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

- initialisation : pour $n = 0$ $\quad$ 0,25

0,5 $u_0 = 2{,}9$ et $u_1 = f(u_0) = 2{,}805$

on a bien $1 \leq 2{,}805 \leq 2{,}9$ vrai pour $n = 0$

- hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, je suppose que $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$

1,5 je veux montrer que $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$

2. $1 \leq u_{k+1} \leq u_k$ or f croissante sur $[1;+\infty[$

donc $f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$ $\quad f(1) = 1$

donc $1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ vrai pour $k+1$

- Conclusion : On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ $\quad$ 0,25

ⓒ On a donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par 1

0,5 donc (u_n) converge vers l (th des suites monotones)

or $1 \leq u_n \leq u_0 < 3$ donc $1 \leq l < 3$

0,5 d'après 3) b $l = 1$

4) $\boxed{u_0 = 3,1}$ on admet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

ⓐ par l'absurde, supposons (u_n) majorée par M $(M \in \mathbb{R}^+)$

alors $u_0 \leq u_n \leq M$ donc $3,1 \leq u_n \leq M$

(u_n) croissante et majorée donc convergente vers l avec $3,1 \leq l \leq M$

1 or $l = 1$ ou 3 impossible

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée

ⓑ (u_n) est croissante non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

0,5 (théorème des suites monotones)

ⓒ On cherche le plus petit p $(p \in \mathbb{N})$ ~~tel que~~ $u_p > 10^6$

Par définition de la limite, p existe.

$P \leftarrow 0$

0,25 $U \leftarrow 3,1$

0,5 Tant que $U \leq 10^6$ faire

0,25 $P \leftarrow P+1$ (1,5)

0,25 $U \leftarrow \frac{1}{2}U^2 - U + 3/2$

FinTant que

0,25 Afficher P