# Correction du devoir n° 2 – TS

0,5 ?

**Ex 1 :** $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$

1) $f(-x) = \cos(-2x) - 2\cos(-x)$ — $f$ est paire

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $= \cos(2x) - 2\cos(x) = f(x)$ — 0,75

2) $f(x+2\pi) = \cos(2(x+2\pi)) - 2\cos(x+2\pi)$ — 0,75

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $= \cos(2x + 2\times 2\pi) - 2\cos(x)$ — $f$ est

$= \cos(2x) - 2\cos(x) = f(x)$ — $2\pi$-périodique

3) On peut étudier $f$ sur une période soit sur $[-\pi ; \pi]$
or $f$ paire donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique $/(Oy)$
dans un repère orthogonal
donc on peut étudier $f$ sur $[0 ; \pi]$ — 1

4) $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x)$
donc $f'(x) = -2\times 2\cos(x)\sin(x) + 2\sin(x)$
$= 2\sin(x)(1 - 2\cos(x))$ — 1,5

sur $[0 ; \pi]$, $2\sin(x) \geq 0$
donc $f'(x) \geq 0 \iff 1 - 2\cos(x) \geq 0 \iff \frac{1}{2} \geq \cos(x)$
$\iff \pi/3 \leq x \leq \pi$ — 1

On obtient donc

| $x$ | $0$ | | $\pi/3$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $-1$ | ↘ | $-3/2$ | ↗ | $3$ |

0,5

Par symétrie, on a

| $x$ | $-\pi$ | | $-\pi/3$ | | $0$ | | $\pi/3$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3$ | ↘ | $-3/2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-3/2$ | ↗ | $3$ |

0,5

5) • Sur $[0 ; \pi/3]$, $-1$ est le maximum pour $f(x)$ atteint en $x=0$ donc $f(x) < 0$ — 0,5

• Sur $[\pi/3 ; \pi]$, $f$ strictement croissante avec $f(\pi/3) = -3/2$ $(<0)$ et $f(\pi) = 3$ $(>0)$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha$ sur $[\pi/3 ; \pi]$ et donc sur $[0 ; \pi/3]$ — 1

D'après la calculatrice
$f(1{,}945) < 0$ et $f(1{,}946) > 0$ donc $1{,}945 < \alpha < 1{,}946$ — 1

Par excès $|\alpha \approx 1{,}95|$

Exo 2 : $f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$ /11

$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ 0,25

1) ⓐ graphique 0,75

ⓑ il semble que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et converge vers 1 0,75

2) ⓐ on veut montrer par récurrence que :

$u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ 0,25

• initialisation : pour $n = 0$ $u_0 = 4$ et $4 \geq 1$ vrai 0,5

• hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, je suppose que $u_k \geq 1$ 0,25

je veux montrer que $u_{k+1} \geq 1$

$u_k \geq 1 \Rightarrow u_k + 1 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{u_k+1} \leq \frac{1}{2}$ $x \mapsto 1/x$ strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Rightarrow -\frac{4}{u_k+1} \geq -2$

$\Rightarrow 3 - \frac{4}{u_k+1} \geq 1 \Rightarrow u_{k+1} \geq 1$ vrai au rang $k+1$ 2

• conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{u_n \geq 1}$ 0,25

ⓑ $f$ dérivable sur $]-1;+\infty[$ $f'(x) > 0$

1,5 $f'(x) = -4 \times \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$ donc $f$ strictement croissante 0,5

ⓒ montrons par récurrence que

$u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ 0,25

• pour $n = 0$ $u_0 = 4$ $u_1 = f(u_0) = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5} = 2,2$ 0,75

$u_1 < u_0$ vrai

• Soit $k \in \mathbb{N}$, je suppose que $u_{k+1} \leq u_k$ ($u_k \geq 1$) $\forall k \in \mathbb{N}$ 0,75

$f$ strictement croissante sur $]-1;+\infty[$

donc $f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \Rightarrow u_{k+2} \leq u_{k+1}$ 2,5

vrai au rang $k+1$

• c'est vrai pour $n=0$, c'est héréditaire 0,25

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \leq u_n$ : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante

ⓓ $(u_n)$ décroissante et minorée par 1

donc $(u_n)$ converge vers $\ell$ ($\geq 1$)

$u_{n+1} = f(u_n)$ $(u_{n+1})$ converge aussi vers $\ell$ (la limite est unique)

donc $\ell$ vérifie $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = 1$