Correction du dev n°1 = TJ

Exo1 : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$

1) $P(2) = 2\times 2^3 - 3\times 2^2 - 3\times 2 + 2 = 16 - 12 - 6 + 2 = 0$

2 est racine de P

donc $P(x) = (x-2)(2x^2 + bx - 1)$ $b \in \mathbb{R}$

$P(x) = (x-2)(2x^2+bx-1) \iff P(x) = 2x^3 + bx^2 - x - 4x^2 - 2bx + 2$

$\iff P(x) = 2x^3 + (b-4)x^2 + (-1-2b)x + 2$

$\iff \begin{cases} b-4 = -3 \\ -1-2b = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ -1-3 = -3 \text{ ok} \end{cases}$

1,5 Donc $\boxed{P(x) = (x-2)(2x^2+x-1)}$ /4,5

2) Soit $f(x) = 2x^2 + x - 1$

$\Delta = 9 \quad \sqrt{\Delta} = 3$

1,5 $\begin{cases} x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{-1+3}{4} = 1/2 \end{cases}$ du signe de $a = 2$ à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		-1		$1/2$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5 $\boxed{P(x) \leq 0 \text{ sur }]-\infty; -1] \cup [1/2; 2]}$

Exo2 : 1) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$ sur $\mathbb{R}$ /4,5

$\iff \begin{cases} X = x^2 \\ 4X^2 + 11X - 3 = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \end{cases}$

$\Delta = 121 + 48 = 169$
$\sqrt{\Delta} = 13$

$\begin{cases} X_1 = \frac{-11+13}{8} = 1/4 \\ X_2 = \frac{-11-13}{8} = \cancel{-3} \end{cases}$

$\iff x^2 = 1/4$

$\iff x = \pm 1/2$ $\boxed{S = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}}$

2) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$ sur $[0; 2\pi[$

$\iff \begin{cases} X = \sin x \\ 2X^2 - \sqrt{3}X - 3 = 0 \text{ sur } [-1; 1] \end{cases}$

$\Delta = 3 + 24 = 27$
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\begin{cases} X_1 = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ X_2 = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{4} = \cancel{\sqrt{3}} \end{cases}$

$\iff \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{S = \{\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}}$

Ex3 : (E_m) : $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$

$\Delta_m = 4m^2 - 4(m+1) = 4(m^2 - m - 1)$ du signe de

$\Delta'_m = m^2 - m - 1$; $\Delta = 1 + 4 = 5$ 0,5

$m_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $m_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

m	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
Δm $a=4$		+	0	−	0	+	

1 /3

$m < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $m > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\Delta_m > 0$, 2 solutions distinctes

$m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\Delta_m = 0$, une seule solution

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\Delta m < 0$, pas de solution 1,5

Ex4 : 1) Dans $]-\pi;\pi]$, $\cos(2x) = 1/2$

$\Leftrightarrow 2x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $2x = \frac{-\pi}{3} + 2k'\pi$ $(k, k' \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \pi/6 + k\pi$ ou $x = -\pi/6 + k'\pi$

$\boxed{S = \left\{ \frac{-5\pi}{6} ; \frac{-\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}}$ 2

2) dans $]-\pi;\pi]$ $\cos x < \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{S = \left]-\pi ; \frac{-5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]}$ 1

3) dans $[0;2\pi[$, $4\sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow \sin^2 x \leq 1/4$ /4,5

$\Leftrightarrow -1/2 \leq \sin x \leq 1/2$

$\boxed{S = [0 ; \pi/6] \cup \left[\frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right[}$ 1,5

Ex5 : $\cos x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $x \in [\pi/2 ; \pi[$ donc $\sin x > 0$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (>0) 1

donc $\sin(2x) = 2\cos x \sin x = -\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1

$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{7\pi}{4} + 2k'\pi$ $(k, k' \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{8} + k'\pi$ /3

$|\cos x| > |\sin x|$ donc $x = 7\pi/8$ 1

Remarque : $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{-\pi}{4} + 2k'\pi$ $(k, k' \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \pi/8 + k\pi$ ou $x = -\pi/8 + k'\pi$ $\leadsto x = 7\pi/8$ $(k = 1)$