Ex 1 : (Liban 2018) • $X \sim \mathcal{E}_\lambda$ $\quad \underline{\lambda = 0{,}02}$ (s^{-1}) 13
temps d'attente en s.

• $\underline{Y \sim \mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)}$ $\begin{cases} \mu = 96 \text{ (s)} \\ \sigma = 26 \text{ (s)} \end{cases}$
temps d'échange

1) $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}02} = 50$ temps d'attente moyen de 50 s
et temps d'échange moyen 96 s
0,75 soit $96 + 50 = 146$ s $= \boxed{2 \text{ min } 26 \text{ s}}$
durée moyenne d'un appel

2) ⓐ 2 min = 120 s $\quad p(X \geqslant 120) = 1 - p(X \leqslant 120)$
probabilité que $\quad = e^{-\lambda \times 120}$
0,75 l'étudiant soit mis en $\quad = e^{-2{,}4} \approx \underline{0{,}091}$
attente plus de 2 min.

0,5 ⓑ $\underline{p(Y \leqslant 90) \approx 0{,}409}$ d'après la calculatrice

3) on veut comparer $P_{X \geqslant 60}(X \geqslant 60 + 30)$
1 min = 60 s
et $p(X \geqslant 30)$

<u>or</u> une loi exponentielle suit une durée de vie sans vieillissement
1 <u>donc</u> $P_{X \geqslant 60}(X \geqslant 60 + 30) = p(X \geqslant 30)$

le fait de raccrocher n'augmente pas ses chances de limiter son attente.

<u>preuve</u> : $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = \dfrac{p(X \geqslant t + h \text{ et } X \geqslant t)}{p(X \geqslant t)}$

$$= \frac{p(X \geqslant t + h)}{p(X \geqslant t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-h} = p(X \geqslant h)$$

Ex2 : (Nouvelle Calédonie nov 2017)

/3

A $f(x) = 2e^x - e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$

on admet que $f(x) \geq 0$ sur $[0\,;\,\ln 2]$

$f(x) \geq 0$ et f continue sur $\mathbb{R}$

$0 < \ln 2$

0,5 donc l'aire cherchée est $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$

$F(x) = 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}$ une primitive de f sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{A} = F(\ln 2) - F(0) = 2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\ln 2} - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$

1 $= 2\times 2 - \frac{1}{2}e^{\ln 4} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\times 4 = 1/2$

$\mathcal{A} = 1/2$ u.a la proposition est fausse

B $f_m(x) = 2m e^x - e^{2x}$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ sur $\mathbb{R}$

on admet que f_m est dérivable

et que $\mathcal{C}_m$ admet une tangente horizontale

en un unique point S_m.

il s'agit de résoudre $f'_m(x) = 0$

$f'_m(x) = 2m e^x - 2e^{2x} = 2e^x(m - e^x)$ 0,5

$f'_m(x) = 0 \iff 2e^x = 0$ ou $m - e^x = 0$

$\iff e^x = m \iff \boxed{x = \ln m}$ ordonnée de S_m

$f_m(\ln m) = 2m e^{\ln m} - e^{2\ln m} = 2m \times m - e^{\ln(m^2)}$ 0,5

$= 2m^2 - m^2 = m^2$ 0,5

S_m a bien pour ordonnée m^2 $(m \in \mathbb{N}^*)$ proposition vraie

Ex3 (Pondichéry 2018) (14)

A(-4) B(2) C(4)

1) A'(ja) B'(jb) C'(jc) avec $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ⓐ $|j|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow |j| = 1$

et $\begin{cases} \cos(2\pi/3) = -1/2 \\ \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2 \end{cases}$ donc $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$= e^{i\,2\pi/3}$

0,5

• $a' = ja = -4e^{i\,2\pi/3} = 4 \times e^{-i\pi} \times e^{i\,2\pi/3}$ $\left(e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1\right)$

0,5 $\Leftrightarrow \underline{a' = 4e^{-i\pi/3}} = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$

$\Leftrightarrow a' = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{2 - 2i\sqrt{3}}$

ou directement en remplaçant j par $\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

0,25 • $b' = jb = 2e^{i\,2\pi/3} = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{-1 + i\sqrt{3}}$

0,25 • $c' = jc = 4e^{i\,2\pi/3} = 4\left(-1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{-2 + 2i\sqrt{3}}$

ⓑ graphique 0,5

2) $\overrightarrow{A'B'}(-3 + 3i\sqrt{3})$ $\overrightarrow{B'C'}(-1 + i\sqrt{3})$

$\overrightarrow{A'B'} = 3\,\overrightarrow{B'C'}$ $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires

0,75 donc A', B' et C' sont alignés

3) N milieu de [CC'] / P milieu de [C'A] } dans le triangle ACC', d'après le théorème des milieux $NP = \frac{1}{2}AC$

ou calcul des longueurs NP et NM

1,25 N milieu de [CC'] / M milieu de [A'C] } dans le triangle A'CC' d'après le théorème des milieux $MN = \frac{1}{2}A'C'$

or $\begin{cases} \overrightarrow{A'C'}(-4 + 4i\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{AC}(8) \end{cases}$ $A'C'^2 = 16 + 16 \times 3 = 64 \Leftrightarrow A'C' = 8$

AC = 8

AC = A'C' = 8 donc <u>NP = MN</u> Le triangle MNP est isocèle en N.