Correction du devoir n°13. TS

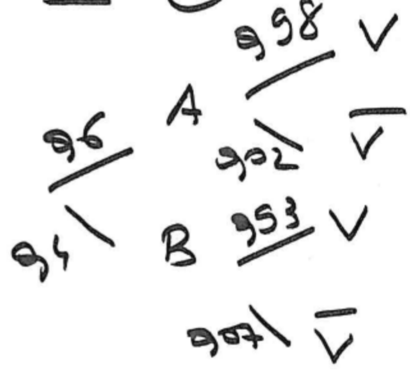
Ex 1 : **Q1** $T \sim \mathcal{E}_\lambda$ avec $\lambda = \frac{\ln 2}{30}$ (T années)

$p(T \geqslant 60) = e^{-60 \times \frac{\ln 2}{30}} = e^{-2\ln 2} \approx 0{,}25$ (b)

Q2 n ? $I_c = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$

$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}05 \iff \frac{\sqrt{n}}{2} \geqslant 20 \iff \sqrt{n} \geqslant 40 \iff \boxed{n \geqslant 1600}$ (c)

Ex 2 : A



$p(V) = 0{,}96$

1) $p(A \cap V) = p(A) \times p_A(V)$
$= 0{,}6 \times 0{,}98 = 0{,}588$

2) A et B forment une partition de l'univers des machines
D'après la formule des probabilités totales :
$p(V) = p(A\cap V) + p(B \cap V)$
$\iff 0{,}96 = 0{,}588 + p(B\cap V)$
$\iff \boxed{p(B\cap V) = 0{,}372}$

donc $p_B(V) = \frac{p(B\cap V)}{p(B)} = \frac{0{,}372}{0{,}4} = 0{,}93$

3) $p_{\bar V}(B) = \frac{p(B \cap \bar V)}{p(\bar V)} = \frac{0{,}4 \times 0{,}07}{1 - 0{,}96} = 0{,}7$

70% des billes non vendables proviennent de la machine B vrai

B 1) $X \sim N(\mu ; \sigma^2)$ avec $\mu = 1$ et $\sigma = 0{,}055$ (cm)

$\underbrace{p(0{,}9 \leqslant X \leqslant 1{,}1)}_{\text{production B}} \approx 0{,}93$ d'après la calculatrice
$= p_B(V)$ c'est vérifié

2) $Y \sim N(\mu ; \sigma'^2)$ avec $\mu = 1$ et σ' ?
production A

Soit $Z = \frac{Y - \mu}{\sigma'} = \frac{Y-1}{\sigma'}$, alors $Z \sim N(0;1)$.

$p(0{,}9 \leq Y \leq 1{,}1) = 0{,}98$

$\Leftrightarrow p(-0{,}1 \leq Y - 1 \leq 0{,}1) = 0{,}98$

$\Leftrightarrow p\left(\frac{-0{,}1}{\sigma'} \leq Z \leq \frac{0{,}1}{\sigma'}\right) = 0{,}98$

d'après la ~~calculatrice~~ calculatrice $\frac{0{,}1}{\sigma'} \approx 2{,}326 \Leftrightarrow \boxed{\sigma' \simeq 0{,}043}$

(C) 1) On reconnait un schéma de Bernoulli
de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$

ⓐ (le remplissage d'un paquet est assimilé à un ~~tirage~~ successif avec remise donc ~~tirage~~ indépendant) (5 couleurs équiprobables)

Soit N la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de billes noires : $N \sim \mathcal{B}(40 ; 0{,}2)$

$\underline{p(N = 10)} = \binom{40}{10} \times 0{,}2^{10} \times 0{,}8^{30} \simeq 0{,}107$

ⓑ $np = 8$
$n(1-p) = 32$
$n \geq 30$
$np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$

les conditions sont vérifiées
Un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % est :

$I = \left[p - 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \simeq \underline{[0{,}076 ; 0{,}324]}$

or $f_{obs} = \frac{12}{40} = 0{,}3$ $\quad f_{obs} \in I$ donc on ne peut pas remettre en cause le réglage au risque d'erreur de 5%

2) cette fois $N \sim \mathcal{B}(n ; 0{,}2)$ $\quad \underline{n ?}$

$p(N \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - p(N = 0) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow 0{,}01 \geq 0{,}8^n$

$x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}01) \geq \ln(0{,}8^n)$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}01) \geq n \ln(0{,}8)$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \leq n \qquad \ln(0{,}8) < 0$

$= 20{,}6$

Il faut au moins $\underline{21 \text{ billes}}$ dans le sachet

Ex3 : $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$

$\Delta : y = x + 2$

1) ⓐ $g(x) = f(x) - (x+2) = e^{-x} + x - 1$
définie dérivable sur $\mathbb{R}$

$g'(x) = -e^{-x} + 1$ $\quad$ $g'(x) \geqslant 0 \iff 1 \geqslant e^{-x}$

$\iff 0 \geqslant -x \iff 0 \leqslant x$

0,5

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ puis strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ 0,75

$g(0) = e^0 + 0 - 1 = 0$
c'est $g(0) = 0$

g admet un minimum sur $\mathbb{R}$, atteint en $x = 0$

ⓑ alors $g(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ $\iff f(x) \geqslant (x+2)$ 0,5

$\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de Δ sur $\mathbb{R}$

2) $f(x) \geqslant x + 2$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-2 ; 2]$

f et $x \mapsto x+2$ continues 0,75

$-2 < 2$

donc l'aire cherchée est $I = \int_{-2}^{2} f(x) - (x+2)\,dx$ en u.a.

$I = \int_{-2}^{2} g(x)\,dx = \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-2}^{2} = -e^{-2} + \cancel{2} - \cancel{2} + e^{2} - 2 - 2$

0,5

$I = e^{2} - e^{-2} - 4$ u.a. $\simeq$ 3,25 u.a. 0,5

Ex4 : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ avec $f_n(x) = x + e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}$

$n \in \mathbb{N}^*$

1) ⓐ f_n continue positive sur $[0 ; 1]$ et $0 < 1$
donc I_n est l'aire, en u.a, du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et $\mathcal{C}_n$.

1

ⓑ graphiquement, $\mathcal{C}_{60}$ est au-dessous de $\mathcal{C}_{15}$, qui est au-dessous de $\mathcal{C}_{6}$ ... et ainsi de suite

donc (I_n) semble décroissante

$A(0;1)$ il semble que (I_n) converge vers $1/2$

1 $\mathcal{D}: x = 1$ la moitié du carré.

2) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(x + e^{-(n+1)x}\right) - \left(x + e^{-nx}\right)$

$= e^{-nx}\left(e^{-x} - 1\right) \quad (e^{-nx} > 0)$

0,25 $0 \leq x \leq 1 \iff 0 \geq -x \geq -1 \iff 1 \geq e^{-x} \geq e^{-1}$

$x \mapsto e^{x}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

donc $e^{-x} - 1 \leq 0$

alors $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0 \iff f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

f_n continues sur $[0;1]$ et $0 < 1$

Par passage à l'intégrale, $\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx$

0,25 soit $I_{n+1} \leq I_n$. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

3) ⓐ $I_n \geq 0$ (aire géométrique).

0,5 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0

donc convergente.

ⓑ $f_n(x) = x + e^{-nx}$ $\quad F_n(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{e^{-nx}}{-n} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{n}e^{-nx}$

$(n \in \mathbb{N}^*)$ une primitive de f_n sur $\mathbb{R}$

1

donc $I_n = F_n(1) - F_n(0) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n} = +\infty$

Par quotient, somme et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right) = 0$

Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$ 0,5