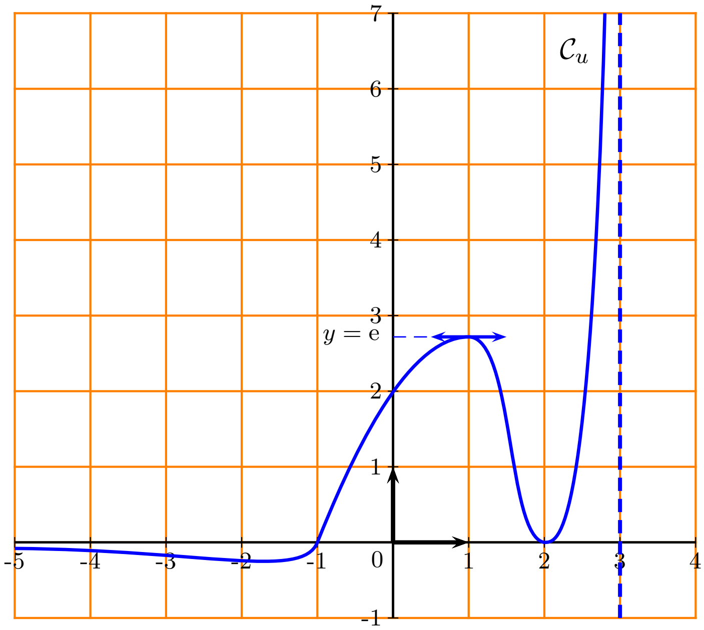
Devoir n°7 - Fonction Ln - TS

23 janvier 2018 - 1h

Exercice 1 (5 pts) : *Cet exercice est un « Vrai-Faux ». Voici 5 affirmations. Pour chacune d'entre elles, indiquer si elle est vraie ou fausse en la corrigeant si nécessaire.*
Toutes les réponses doivent être justifiées soigneusement.

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$; son ensemble de définition est $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Soit la fonction g définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln(\ln x)$.
   L'inéquation $g(x) > 0$ admet pour ensemble de solutions $]1\ ;\ +\infty[$.
3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $]-\infty\ ;\ 3[$. On note u' la dérivée de u.
   On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_u$ représentant la fonction u.
   L'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 3$ sont deux asymptotes à $\mathcal{C}_u$.
   La droite d'équation $y = \mathrm{e}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_u$ en son point d'abscisse 1. La courbe $\mathcal{C}_u$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 et lui est tangente au point d'abscisse 2.

   Soit f la fonction définie par $f = \ln(u)$ sur $]-1;2[\cup]2;3[$. On note f' sa fonction dérivée.



a) $f'(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

b) L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions.

c) $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

Exercice 2 (15 pts) :

Partie A : On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\ \ln(x + 3) - x$$

1. Montrer que pour tout x strictement positif, on a $f(x) = x(5\ \dfrac{\ln x}{x} - 1) + 5\ \ln(1 + \dfrac{3}{x})$
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$; calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.

   c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : Soit la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5\ \ln(u_n+3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 5\ \ln(x+3)$$

On a tracé dans le repère orthonormé ci-dessous, la droite (D) d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. Construire sur l'axe des abscisses, les termes u_0, u_1 et u_2 de la suite (u_n), en utilisant la droite et la courbe données, et en laissant apparaître les traits de construction.
   Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).
2. a) Etudier le sens de variation de la fonction g sur $[0;+\infty[$.
   b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$, où α est défini dans la partie A question 4. a.
   c) Montrer par récurrence, que pour tout entier n, on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.
   d) Démontrer alors la conjecture émise (on pourra utiliser la question 4. c. de la partie A.).
   e) Justifier que la suite (u_n) est convergente, et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
3. **Bonus :** On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4
Répéter Tant que $u - 14{,}2 < 0$
u prend la valeur de $5\ln(u+3)$
Fin du Tant que
Afficher u

   a) Justifier que cet algorithme se termine.
   b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).