# Correction du devoir n°7 – TS

**Ex 1** : 1) $f(x) = \ln(1-x^2)$ $\quad D_f = ]0\,;+\infty[$ ?

il faut que $1-x^2>0$ or

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x^2$ <br> $a=-1$ | | $-$ <br> signe de $a$ | $0$ | $+$ <br> de $-a$ | $0$ | $-$ <br> de $a$ | |

donc $\underline{D_f = ]-1\,;1[}$ Faux

2) $\underline{g(x) = \ln(\ln x)}$ sur $]1\,;+\infty[$

$g(x) > 0 \iff \ln(\ln x) > 0 \iff \ln x > 1 \iff x > e$ car $x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

donc $S = \underline{]e\,;+\infty[}$ ~~Faux~~.

3) $D_u = ]-\infty\,;3[$ $\quad \underline{f = \ln u}$ $\quad$ sur $]-1\,;2[\cup]2\,;3[$

ⓐ $f' = \dfrac{u'}{u}$ donc $f'(1) = \dfrac{u'(1)}{u(1)} = \dfrac{0}{e}$ $\to$ tangente parallèle à l'axe des abscisses en $x=1$.

donc $\boxed{f'(1)=0}$ Faux

ⓑ $f(x) = 1 \iff \ln u(x) = 1 \iff u(x) = e$

or $C_u$ coupe la droite d'équation $y=e$ en 2 points

Donc cette équation admet 2 solutions $\quad$ <u>VRAI</u>

ⓒ $\lim\limits_{x\to -1^+} u(x) = 0^+$ $\quad X = u(x)$ $\quad \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$

<u>Par composée</u> $\boxed{\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty}$ $\quad$ <u>VRAI</u>

---

**Ex 2** : <u>Partie A</u> : $\boxed{f(x) = 5\ln(x+3) - x}$ sur $[0\,;+\infty[$

1) $x>0$ $\quad x\left(5\cdot\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$

$= 5\ln x - x + 5\ln\left(\dfrac{x+3}{x}\right) = \cancel{5\ln x} - x + 5\left(\ln(x+3) - \ln x\right)$

$= -x + 5\ln(x+3) = f(x)$ $\quad$ <u>vérifié</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées

<u>Par</u> produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$

par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 1$ $\quad$ $X = 1+\dfrac{3}{x}$ $\quad \lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0$

Par composée et produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 0}$

Par somme, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2) $f$ dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée et somme

$f'(x) = \dfrac{5}{x+3} - 1 = \dfrac{5-(x+3)}{x+3} = \dfrac{2-x}{x+3}$ $\quad x+3>0$ sur $[0;+\infty[$

donc $f'(x)$ est du signe de $2-x$

3)

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $5\ln 3$ | $\nearrow$ | $5\ln 5 - 2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

$f(0) = 5\ln 3 \approx 5,5$

$f(2) = 5\ln 5 - 2 \approx 6,05$

4) • Sur $[0;2]$, $f$ ~~strictement~~ croissante et $f(0)>0$ donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution.

• Sur $[2;+\infty[$, $f$ continue ~~strictement~~ décroissante avec $f(2)>0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$0 \in ]-\infty; f(2)[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[2;+\infty[$

Au total, une seule solution sur $[0;+\infty[$

5) $f(14,23)>0$ et $f(14,24)<0$ donc $14,23 < \alpha < 14,24$

soit $\boxed{\alpha \approx 14,23}$ par défaut

6) on a $f(x)>0$ sur $[0;2]$ et sur $[2;+\infty[$ $f$ décroissante avec $f(\alpha)=0$ donc

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Partie B : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 5\ln(u_n+3) \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\qquad$ $g(x) = 5\ln(x+3)$ sur $[0;+\infty[$

1) graphiquement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble croissante.

2) a) $g'(x) = \dfrac{5}{x+3}$ $g'(x) > 0$ $g$ strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

b) on a $f(\alpha) = \alpha \iff 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0$

$\iff 5\ln(\alpha+3) = \alpha \iff \boxed{g(\alpha) = \alpha}$

c) On veut montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq \alpha$ pour $n \in \mathbb{N}$

• initialisation : pour $n = 0$ $u_0 = 4$ $\alpha \simeq 14{,}2$

donc $0 \leq u_0 \leq \alpha$ vérifié

• hérédité : soit $k \in \mathbb{N} / 0 \leq u_k \leq \alpha$ $u_{k+1} = g(u_k)$

alors $g(0) \leq g(u_k) \leq g(\alpha)$ car $g$ croissante

donc $5\ln 3 \leq u_{k+1} \leq \alpha$ et $5\ln 3 > 0$

donc $0 \leq u_{k+1} \leq \alpha$ vrai au rang $k+1$

• Conclusion : encadrement vrai pour $n = 0$, héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$.

d) $u_{n+1} - u_n = 5\ln(u_n+3) - u_n = f(u_n)$.

$0 \leq u_n \leq \alpha \Rightarrow f(u_n) \geq 0$ d'après le tableau de signes Question 4.c. Partie A

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

soit $u_{n+1} \geq u_n$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

e) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\alpha$ donc convergente vers $l$ avec $0 \leq l \leq \alpha$

$u_{n+1} = g(u_n)$ par passage à la limite,

on obtient $l = g(l)$ soit $\boxed{l = \alpha}$

3) Bonus : a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow |u_n - \alpha| < \varepsilon$

L'algorithme calcule et affiche le premier terme $u_n \geq 14{,}2$

On a $14{,}2 < \alpha$ $(\simeq 14{,}23)$ c'est à dire on se rapproche de $\alpha$ à $3 \cdot 10^{-2}$ $(= \varepsilon)$. Par définition de la limite l'algorithme s'arrête

b) L'algorithme affichera $u_6 \simeq \boxed{14{,}22315}$