Devoir n°6 - Fonction Exponentielle - TS

20 décembre 2017 - 2h

Exercice 1 (1,5 pts) : Restitution Organisée de Connaissances

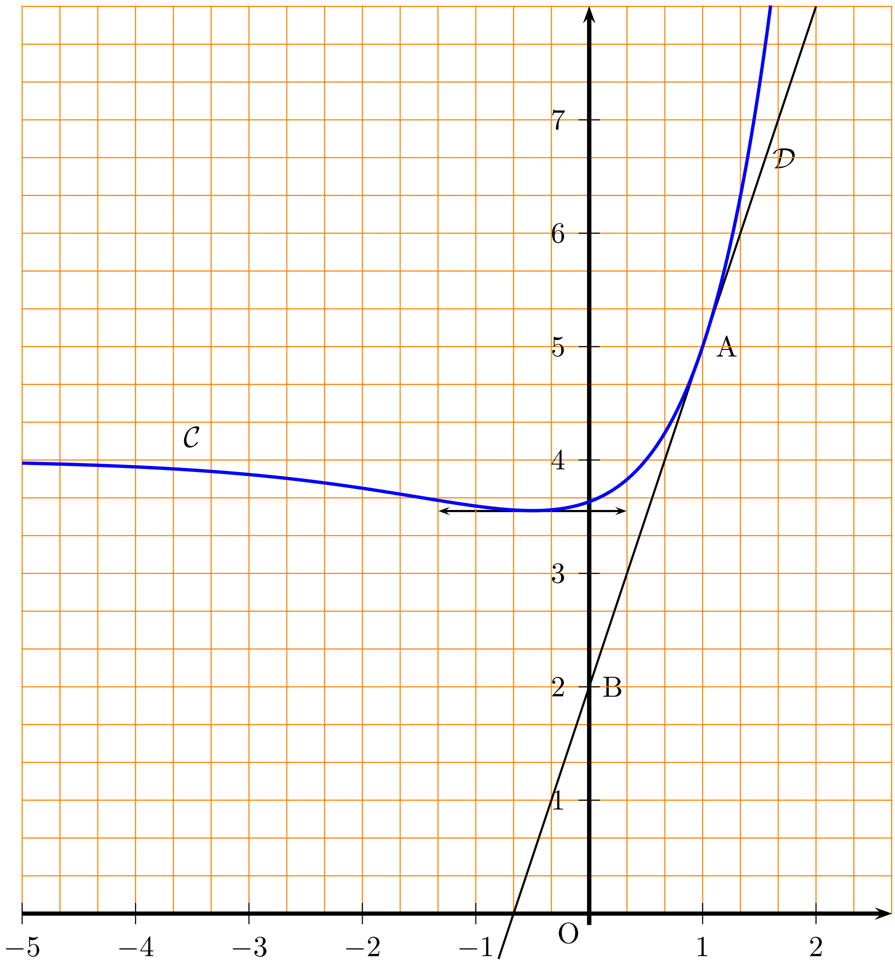
Prérequis : On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

Exercice 2 (5,5 pts) : Les deux parties sont indépendantes
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (ax+b)e^{x-1} + c,$$

où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer dans la partie A.
On note f' la fonction dérivée de f.



La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal est représentée ci-contre.
La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1 ; 5)$; elle admet la droite $\mathcal{D}$ comme tangente en ce point. Le point $B(0 ; 2)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.
La courbe $\mathcal{C}$ admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.

Partie A

1. Déterminer les valeurs de $f(1)$, de $f'(-\dfrac{1}{2})$ et de $f'(1)$.
2. Déterminer les valeurs de a, b et c.

Partie B

On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel x, $f(x) = (2x-1)e^{x-1} + 4$.

1. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{2}{e} x e^x - \dfrac{1}{e} e^x + 4$; en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. a) Donner pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
   b) Établir le tableau de variations de f.

Exercice 3 (5 pts) : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par
$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$
   a) Étudier le sens de variation de la fonction g.
   b) Montrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$; donner un encadrement de a à 10^{-3}.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.
2. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$; en déduire le sens de variation de la fonction f.
   b) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

Exercice 4 (5 pts) : On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x sur $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x sur $[0\ ;\ +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$; calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.

Exercice 5 (3 pts) : Soit k un réel quelconque.
Déterminer, en fonction des valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation

$$\mathrm{e}^{2x} - 2x + k = 0$$

(On attend une démarche détaillée, même incomplète. Les limites ne sont pas exigées.)