Correction du devoir n° 6 – TS

Ex 1 : on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$xe^x = -\left(\frac{-x}{e^{-x}}\right)$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ on pose $X = -x$

1,5

$x \neq 0$ $\quad = -\frac{1}{\left(\frac{e^{-x}}{-x}\right)}$ $\qquad \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par croissances comparées

Par composée et quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Ex 2 : $f(x) = (ax+b)e^{x-1} + c$ sur $\mathbb{R}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$

/7

A 1) $f(1) = 5$ car $A(1;5) \in \mathcal{C}$

$f'(-1/2) = 0$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-1/2$ est parallèle à l'axe des abscisses

1,25

$f'(1) = 3$ coefficient directeur de $\mathcal{D}$ en A

2) f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit

$f'(x) = ae^{x-1} + (ax+b)e^{x-1} = \boxed{(ax+a+b)e^{x-1}}$ 0,5

$$\begin{cases} f(1) = 5 \iff \boxed{a+b+c=5} \\ f'(-1/2) = 0 \iff \left(\frac{1}{2}a+b\right)e^{-1/2} = 0 \iff \frac{1}{2}a+b = 0 \iff \boxed{a+2b=0} \\ f'(1) = 3 \iff \boxed{2a+b=3} \end{cases}$$

1

On obtient le système

$$\begin{cases} a+b+c = 5 & (L_1) \\ a+2b = 0 & (L_2) \\ 2a+b = 3 & (L_3) \end{cases} \iff \quad 2(L_2) - (L_3) \quad \begin{cases} c = 4 \\ a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

donc $\boxed{f(x) = (2x-1)e^{x-1} + 4}$ 1

B 1) a) $f(x) = \frac{1}{e}(2x-1)e^x + 4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e}(2x-1) = +\infty$ — Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

0,75

ⓑ $f(x) = \frac{2}{e} x e^x - \frac{1}{e} e^x + 4$ en développant

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4}$ 1

La droite d'équation $y = 4$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$ 0,25

2) ⓐ $f'(x) = (2x + 2 - 1) e^{x-1} = \boxed{(2x+1) e^{x-1}}$ d'après Ⓐ 2. 0,5

ⓑ $e^{x-1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(2x+1)$

0,75

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	$f(-1/2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1/2) = -2e^{-3/2} + 4$
$= 4 - \frac{2}{e^{3/2}}$

Ex3 : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ 15,5

1) $g(x) = x^2 e^x - 1$ sur $[0; +\infty[$

ⓐ g dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée et produit

0,5 $g'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = \boxed{x e^x (2 + x)}$

Sur $[0; +\infty[$ $x \geq 0$, $e^x > 0$ et $2 + x > 0$

0,25 donc $g'(x) \geq 0$ et g strictement croissante

ⓑ • g continue sur $[0; +\infty[$, strictement croissante

• $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (par produit)

• $0 \in]-1; +\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0; +\infty[$ 1,25

$\left.\begin{array}{l} g(0{,}703) < 0 \\ g(0{,}704) > 0 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{0{,}703 < \alpha < 0{,}704}$ 0,5

ⓒ g strictement croissante avec $g(\alpha) = 0$

0,5 donc

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) ⓐ f dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme

$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ 0,5

$x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

0,75 f ~~strictement~~ décroissante sur $]0;\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha;+\infty[$

ⓑ alors f admet un minimum en $x=\alpha$

c'est $f(\alpha) = e^\alpha + \frac{1}{\alpha}$ or, $g(\alpha) = \alpha^2e^\alpha - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha^2}$

0,75 donc $f(\alpha) = \boxed{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} = m}$ minimum pour f sur $]0;+\infty[$

Ex 4 : $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$ sur $[0;+\infty[$ 14

Ⓐ $g(x) = f(x) - (x-3)$ sur $[0;+\infty[$

1) $g(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} = e^{-x}(5 - 3e^{-x})$

$e^{-x}>0$ $\quad x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1$ $\quad x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow -3e^{-x} \geq -3 \Rightarrow 5-3e^{-x} \geq 2$

0,75 Alors $g(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$

2) $\mathcal{D} : y = x-3$ $\quad \mathcal{D}$ et $\mathcal{C}_f$ ont un point commun

si $g(x) = 0$ $\quad (\Leftrightarrow f(x) = x-3)$ $\quad$ or $g(x)>0$

0,5 donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ n'ont pas de point commun

Ⓑ $\begin{cases} M(x;f(x)) \in \mathcal{C}_f \\ N(x;x-3) \in \mathcal{D} \end{cases}$ 1,25 $\quad$ 1) $MN^2 = (f(x)-(x-3))^2 + (x-x)^2 = g(x)^2$

$\Leftrightarrow \boxed{MN = g(x)}$ car $g(x)>0$ 0,5

2) $g'(x) = f'(x) - 1 = (-5e^{-x} + 6e^{-2x} + 1) - 1$

0,5 $= -5e^{-x} + 6e^{-2x} = \boxed{e^{-x}(-5+6e^{-x})}$

3) $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -5 + 6e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 6e^{-x} \geq 5$

$\Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{5}{6} \Leftrightarrow e^x \leq \frac{6}{5} \Leftrightarrow x \leq \ln\left(\frac{6}{5}\right)$

0,5

x	0	$\ln(6/5) \approx 0{,}18$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

$g(\ln 6/5) = \frac{25}{12}$

g croissante sur $[0 ; \ln(\frac{6}{5})]$ puis décroissante sur $[\ln(6/5) ; +\infty[$

25

donc $g(x)$ admet un maximum en $x = \ln(6/5)$

35

donc la valeur maximale de MN est de $25/12$

Ex5 : $(k \in \mathbb{R})$ Solutions de $e^{2x} - 2x + k = 0$?

Soit $f_k(x) = e^{2x} - 2x + k$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'_k(x) = 2e^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1) = \boxed{2(e^x - 1)(e^x + 1)}$

$2(e^x + 1) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'_k(x)$ est du signe de $e^x - 1$

$e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_k(x)$	$-$	0	$+$
$f_k(x)$	$+\infty \searrow$	$1+k$	$\nearrow +\infty$

$f(0) = 1 + k$ est le minimum sur $\mathbb{R}$

/3

- $\boxed{k > -1} \Rightarrow 1 + k > 0$ et l'équation $f_k(x) = 0$ n'admet aucune solution
- $\boxed{k = -1} \Rightarrow 1 + k = 0$ et l'équation $f_k(x) = 0$ admet une unique solution 0.
- $\boxed{k < -1} \Rightarrow 1 + k < 0$ et l'équation $f_k(x) = 0$ admet 2 solutions : α sur $]-\infty ; 0[$ et β sur $]0 ; +\infty[$

en effet, f_k continue sur $\mathbb{R}$

$\begin{cases} \text{strictement décroissante sur }]-\infty ; 0] \\ \text{strictement croissante sur } [0 ; +\infty[\end{cases}$

$f(0) < 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$

on applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[0 ; +\infty[$