Correction du devoir n°5 – TS

Ex 1 : $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -3 \\ 9 - x^2 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$ 	/5

1) f est continue sur $]-\infty ; -3[$ et sur $]-3 ; +\infty[$ comme fonctions usuelles 0,5

<u>en $x = -3$</u>

$f(-3) = 9 - (-3)^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to -3^-} x+3 = 0 = f(-3)$ 1

donc f continue en -3 0,5

alors f <u>continue sur $\mathbb{R}$</u>

2) f dérivable sur $]-\infty ; -3[$ et sur $]-3 ; +\infty[$ comme fonctions usuelles. 0,5

<u>en $x = -3$</u>

$T(x) = \dfrac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \dfrac{x+3}{x+3} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -3^-} T(x) = 1$ 0,75

$x < -3$

$\underset{x > -3}{T(x)} = \dfrac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \dfrac{9 - x^2}{x+3} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{x+3} = 3 - x$ 1,25

$\lim\limits_{x \to -3^+} T(x) = 6$

Les 2 limites sont différentes $1 \neq 6$ 0,5

donc f n'est pas dérivable en $x = -3$

Ex 2 : Ⓐ $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ définie dérivable sur $[-1 ; +\infty[$ (c'est un polynôme)

1) $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ 0,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$ 0,5

$a = 6$, $a > 0$

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

0,5 0,5

2) Sur $[-1 ; 1]$, $g(0) = -1$ est le maximum pour $g(x)$ donc $g(x) < 0$ 0,75

Sur $[1 ; +\infty[$, g continue, strictement croissante

avec $g(1) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

1,5 $0 \in [-2 ; +\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une seule solution α sur $[1;+\infty[$

0,25 Au total, une seule solution sur $[-1;+\infty[$

0,75 $g(1{,}67)<0$; $g(1{,}68)>0$ donc $1{,}67<\alpha<1{,}68$ et $\boxed{\alpha \approx 1{,}7}$ par excès

3) Sur $[-1;1]$, $g(x)<0$ et sur $[1;+\infty[$ g strictement croissante avec $g(\alpha)=0$ donc

0,75

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(B) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$ définie dérivable sur $]-1;+\infty[$ comme quotient $(x^3+1 \neq 0)$ 0,5

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0$ fonction rationnelle 1

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ 0,5

$\lim\limits_{x\to-1} (1-x) = 2$

$\lim\limits_{x\to-1^+} x^3+1 = 0^+$ $\quad x \mapsto x^3$ strictement croissante

Par quotient $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ 1,5

2) a) $f'(x) = \dfrac{-(x^3+1)-(1-x)\times 3x^2}{(x^3+1)^2} = \dfrac{-x^3-1-3x^2+3x^3}{(x^3+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$ 1

b) $(x^3+1)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ 0,5

alors

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

0,5

3) $T_A : y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$f(1)=0$ et $f'(1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$T_A : y = \dfrac{-1}{2}(x-1)$

$\boxed{y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}}$ 1

4) $T_B : y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$

$f(0)=1$ et $f'(0)=-1$ donc $T_B : \boxed{y=-x+1}$ 1

$f(x)-(-x+1) = \dfrac{1-x}{x^3+1} - (1-x) = (1-x)\left(\dfrac{1}{x^3+1} - \dfrac{x^3+1}{x^3+1}\right)$

$= \dfrac{(x-1)x^3}{x^3+1}$

x	-1		0		1		$+\infty$
x^3	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
x^3+1	‖	$+$		$+$		$+$	
$f(x)-(-x+1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

1,5

Sur $]-1;0]$ et sur $[1;+\infty[$ $f(x) \geq -x+1$
donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de T_B
Sur $]0;1[$, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de T_B

5) Courbe $f(\alpha) \approx -9{,}12$

Devoir n°5 - Continuité - Dérivabilité - TVI - TS

5 décembre 2017 - 1h

Exercice 1 (5 pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -3 \\ 9 - x^2 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (15 pts) : **Partie A :** Soit la fonction g définie sur $[-1; +\infty[$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1. Etudier le sens de variation de g sur $[-1; +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[-1; +\infty[$ que l'on notera α. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}, puis une valeur approchée à 10^{-1}.
3. En déduire le signe de g sur $[-1; +\infty[$.

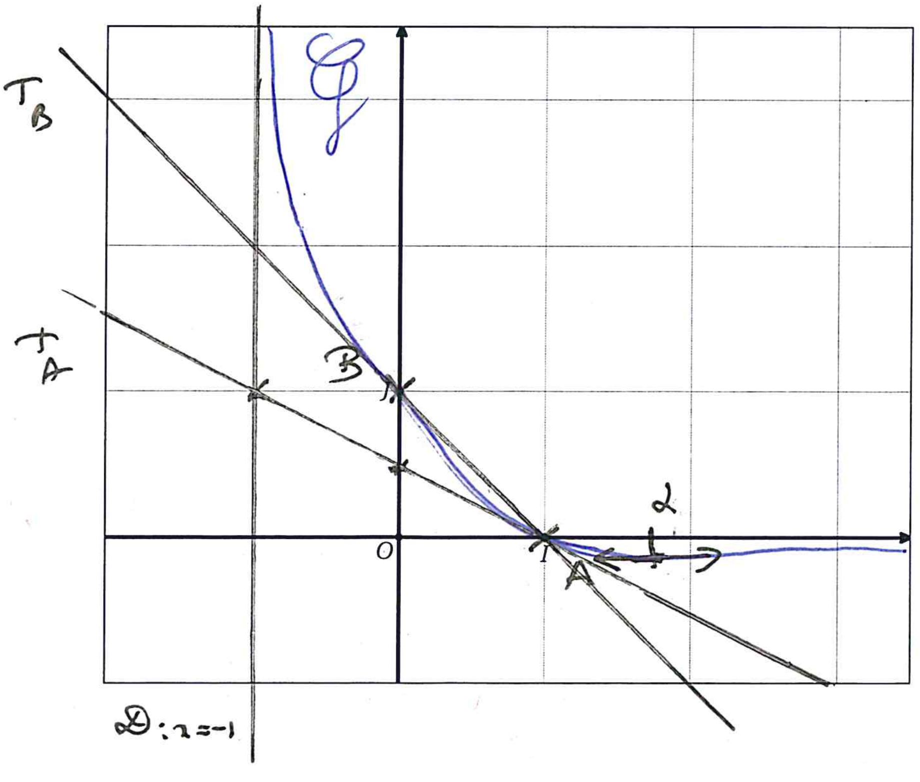
Partie B : Soit la fonction f définie sur $I =]-1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de I et préciser les asymptotes (s'il y a lieu).
2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$.

   b) Dresser le tableau de variations de f.
3. Déterminer une équation de (T_A), tangente à $\mathcal{C}_f$ en A d'abscisse 1.
4. Déterminer une équation de (T_B), tangente à $\mathcal{C}_f$ en B d'abscisse 0 ; étudier la position relative de (T_B) et $\mathcal{C}_f$.



0,25 × 3
+ 0,5 α
+ 0,5 courbe
+ asymptote
+ 0,5