# Correction du devoir n° 3 — TS

**Ex 1 :** A (1) pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n \geqslant v_n$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ donc pour tout $A > 0$

il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_1 \Rightarrow v_n > A$

Posons $N = \max(n_0 ; n_1)$

pour $n \geqslant N$, on a $n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant v_n$

et $n \geqslant n_1 \Rightarrow v_n > A$

Donc $u_n \geqslant v_n > A$ Par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

B $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) D'après la calculatrice, il semble que

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

2) a) $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 = -\frac{1}{4}$

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1 = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$

b) On admet que $\boxed{u_n \geqslant 0}$ pour $n \geqslant 3$ $(n \in \mathbb{N})$

on veut montrer par récurrence que

$\boxed{u_n \geqslant n - 2 \text{ pour } n \geqslant 4}$ $(n \in \mathbb{N})$ 0,25

- initialisation : pour $n = 4$

• Conclusion : inégalité vraie pour $n=4$, héréditaire donc $\forall n \in \mathbb{N} / n \geq 4$ : $u_n \geq n-2$ 0,25

ⓒ $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-2) = +\infty$ et $u_n \geq n-2$ pour $n \geq 4$

Par comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ 1

3) $\boxed{v_n = 4u_n - 8n + 24}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ⓐ $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24$

$= 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8n - 8 + 24$

$= 2u_n - 4n + 12$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$= \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \frac{1}{2}v_n$

$v_0 = 4u_0 - 0 + 24 = 28$

donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de 1er terme $v_0 = 28$.

ⓑ $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

or $4u_n = v_n + 8n - 24 = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8n - 24$

donc $\boxed{u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ⓒ $u_n = x_n + y_n$ avec $\left\{ x_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \right.$
$(\forall n \in \mathbb{N})$

Ex2 : A $\begin{cases} u_0 = 0{,}3 \\ \boxed{u_{n+1} = 0{,}9\, u_n(1-u_n)} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$ 0,25

$u_n$ : nombre de tortues en milliers en 2000+n

1) $u_1 = 0{,}9\, u_0(1-u_0) = 0{,}189$ 0,25

$u_2 = 0{,}9\, u_1(1-u_1) = 0{,}1379511$ 0,25

Début 2001, l'île compte 189 tortues et début 2002, environ 138 tortues. 0,25

2) On admet que $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq 1-u_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ 0,25

a) $u_{n+1} = 0{,}9\, u_n(1-u_n)$

$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0{,}9\, u_n$

$0 \leq 1-u_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Par produit $0 \leq \boxed{u_{n+1} \leq 0{,}9\, u_n}$

b) On veut montrer par récurrence que $\boxed{0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0{,}9^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ 0,25

- initialisation : pour $n=0$ $u_0 = 0{,}3$

$0{,}3 \times 0{,}9^0 = 0{,}3 \times 1 = 0{,}3$ donc $0 \leq u_0 \leq 0{,}3 \times 0{,}9^0$ 0,5

vrai pour $n=0$

- hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq u_k \leq 0{,}3 \times 0{,}9^k$

c) $-1 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$

Par produit $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}3 \times 0{,}9^n = 0}$ 0,5

Or $0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0{,}9^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ 0,5

Les tortues tendent à disparaître de l'île selon ce modèle. 0,25

3) Tant que $\underline{u > 0{,}03}$ faire 0,5

$\underline{u \leftarrow 0{,}9u(1-u)}$ 0,25

$\underline{n \leftarrow n+1}$ 0,25

fin tant que

afficher $2000 + n - 1$ 0,5

B) $\begin{cases} v_0 = 0{,}032 \\ v_{n+1} = 1{,}06\, v_n (1 - v_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$ 0,25

pour $n \geq 0$ $v_n$ est le nombre de tortues en $2010 + n$

1) $v_1 = 1{,}06\, v_0 (1 - v_0) \simeq 0{,}03283$

$v_2 = 1{,}06\, v_1 (1 - v_1) \approx 0{,}03366$ 0,5

Au début de 2011, il y avait encore 32 tortues et 33 tortues début 2012 0,25

2) on suppose que $\lim v_n = \ell$ donc $\lim v_{n+1} = \ell$