Correction du devoir n°2 - TS

Ex 1 : $f(x) = \cos(3x) + 1$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

1) $f(-x) = \cos(-3x) + 1 = \cos(3x) + 1 = f(x)$ $\quad$ f est paire

2) $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + 1 = \cos(3x + 2\pi) + 1$

$= \cos(3x) + 1 = f(x)$

donc f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

3) $f'(x) = -3\sin(3x)$ $\quad$ donc

$0 \leq x \leq \pi/3$

$\Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq \pi$

$\Leftrightarrow \sin(3x) \geq 0$

x	0		$\pi/3$
$f'(x)$	0	$-$	0
f	2	$\searrow$	0

4) f paire donc $\mathcal{C}_f$ serait symétrique par rapport à (Oy) dans un repère orthogonal.

On a donc par symétrie

x	$-\pi/3$		0		$\pi/3$
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ est une période d'amplitude $2\pi/3$

Il suffit donc de reproduire le tableau sur 2 nouvelles périodes $\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$ et $\left[\pi/3; \pi\right]$

x	$-\pi$		$-2\pi/3$		$-\pi/3$		0		$\pi/3$		$2\pi/3$		π
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Ex 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$

$n \in \mathbb{N}$ alors $2n + 3 > 0$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

2) On veut montrer par récurrence que $\boxed{u_n = (n+1)^2 \ \forall n \in \mathbb{N}}$

- **initialisation** : pour $n = 0$ $\quad u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$ vérifié
- **hérédité** : soit $k \in \mathbb{N}$ ~~tel~~ que $u_k = (k+1)^2$, on veut montrer que $u_{k+1} = (k+2)^2$

or $u_{k+1} = u_k + 2k + 3 = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4$

$= (k+2)^2$ $\quad$ vrai au rang $k+1$

- **Conclusion** : vrai pour $n = 0$, héréditaire donc $\boxed{u_n = (n+1)^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ or $n^2+2n+1 \geq n^2$

donc $u_n \geq n^2$

4) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc minorée par $u_0 = 1$

Par contre (u_n) n'est pas majorée

car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $u_n \geq n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Exo3 : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1) ⓐ graphique

ⓑ Il semble que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et convergente vers 1.

2) $f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

ⓐ $= \frac{1}{4}(2x - 1)$

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1/2]$ et croissante sur $[1/2 ; +\infty[$

ⓑ On veut montrer par récurrence que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

- initialisation : pour $n = 0$ $u_0 = 3$ et $u_1 = f(3) = \frac{5}{2} = 2{,}5$
on a bien $1 \leq 2{,}5 \leq 3 \leq 3$ Vrai pour $n = 0$

- hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 3$
f croissante sur $[1/2 ; +\infty[$ donc sur $[1 ; 3]$
alors $f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(3)$ $\Big\}$ $f(1) = 1$, $f(3) = 2{,}5$
$\Rightarrow 1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 2{,}5 \leq 3$
Vrai au rang $k+1$

- Conclusion : c'est vrai pour $n = 0$ et héréditaire
donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

ⓒ Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et bornée par 1 et 3

NOTE BOOK

Ex 4 : $f(x) = x - \frac{\pi}{5}\cos(2\pi x)$ définie dérivable sur $[0;+\infty[$

$u_n = f(n) = n - \pi/5 \cos(2\pi n)$ $(n \in \mathbb{N})$

1) $u_{n+1} - u_n = \left((n+1) - \frac{\pi}{5}\cos(2\pi(n+1))\right) - \left(n - \frac{\pi}{5}\cos(2\pi n)\right)$

$= n + 1 - \frac{\pi}{5}\cos(2\pi n + 2\pi) - n + \frac{\pi}{5}\cos(2\pi n)$

$= -\pi/5 \cos(2\pi n)$

$= 1$

or $1 > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

de plus $u_{n+1} = u_n + 1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite arithmétique de raison 1 de terme initial $u_0 = f(0) = -\pi/5$

2) $f'(x) = 1 + \frac{\pi}{5} \times 2\pi \sin(2\pi x) = \boxed{1 + \frac{2\pi^2}{5}\sin(2\pi x)}$

f' est périodique de période 1

$f'(x+1) = 1 + \frac{2\pi^2}{5}\sin(2\pi(x+1)) = 1 + \frac{2\pi^2}{5}\sin(2\pi x + 2\pi)$

$= f'(x)$

$-1 \leq \sin(2\pi x) \leq 1$ $\forall x \in [0;+\infty[$

$\sin(2\pi x) = 1 \iff 2\pi x = \pi/2 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{N}$

$\iff x = \frac{1}{4} + k$

$\sin(2\pi x) = -1 \iff 2\pi x = 3\pi/2 + 2k'\pi$ $k' \in \mathbb{N}$

$\iff x = \frac{3}{4} + k'$

or $1 + \frac{2\pi^2}{5} > 0$ et $1 - \frac{2\pi^2}{5} < 0$

donc $f'(\frac{1}{4} + k) > 0$ et $f'(\frac{3}{4} + k') < 0$

alors f n'est pas toujours croissante sur $[0;+\infty[$