Correction du DM n°13 - TS

$\frac{1}{5}$ ~~5~~ 7,5

Ex 1 : A1

$A(1;2;3)$ $\quad$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ $\quad$ 1,5

$B(3;0;1)$ $\quad$ il n'existe pas de réels k tel que

$C(-1;0;1)$ $\quad$ $\vec{AC} = k\vec{AB}$

donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires

A, B, C non alignés $\quad$ Faux

A2 $\quad E(2;1;-3)$ $\quad$ $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 2t \\ y = -3+4t \\ z = 7-10t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

$F(1;-1;2)$ $\quad$ 1,5

$\begin{cases} 2 = 2t \\ 1 = -3+4t \\ -3 = 7-10t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ 1 = -3+4 \text{ ok} \\ -3 = 7-10 \text{ ok} \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 1 = 2t \\ -1 = -3+4t \\ 2 = 7-10t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1/2 \\ -1 = -3+2 \text{ ok} \\ 2 = 7-5 \text{ ok} \end{cases}$

donc $E \in \mathcal{D}$ $\quad$ donc $F \in \mathcal{D}$

donc $\mathcal{D}$ et (EF) confondues $\quad$ VRAI

A3 $\quad (d) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ $\quad$ $(d') : \begin{cases} x = 2-t' \\ y = 1+2t' \\ z = t' \end{cases}$ $(t'\in\mathbb{R})$ $\quad$ 2

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ vecteurs directeurs de (d) et (d')

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

donc (d) et (d') ne sont pas parallèles

Résolvons le système

$\begin{cases} 1+2t = 2-t' \quad ① \\ -2-3t = 1+2t' \\ -1-t = t' \quad ② \end{cases} \iff \begin{cases} t' = -3 \\ -2-6 = 1-6 \text{ non vérifié} \\ t = 2 \quad ①+② \end{cases}$

alors (d) et (d') ne sont pas sécantes

Elles ne sont donc pas coplanaires $\quad$ VRAI

A4 $\quad (\mathcal{D}) : \begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ $\quad$ Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$.

$\mathcal{P}(I, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

On a $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires

alors $\mathcal{D} // \mathcal{P}$ $\quad$ VRAI $\quad$ 2,5

Devoir n°13 - Espace - TS

9 mai 2018 - 1h

Exercice 1 (5,5 pts) : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : (1 pt) Soient les points $A(1~;~2~;~3)$, $B(3~;~0~;~1)$ et $C(-1~;~0~;~1)$.
Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : (1 pt) Soient les points $E(2~;~1~;~-3)$ et $F(1~;~-1~;~2)$.
Une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t \\ y &=& -3+4t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 7-10t \end{array}\right.$$

Affirmation 3 : (1,5 pt) Les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& -2-3t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$$

Une représentation paramétrique de la droite (d') est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2-t' \\ y &=& 1+2t', \quad t' \in \mathbb{R}. \\ z &=& t' \end{array}\right.$$

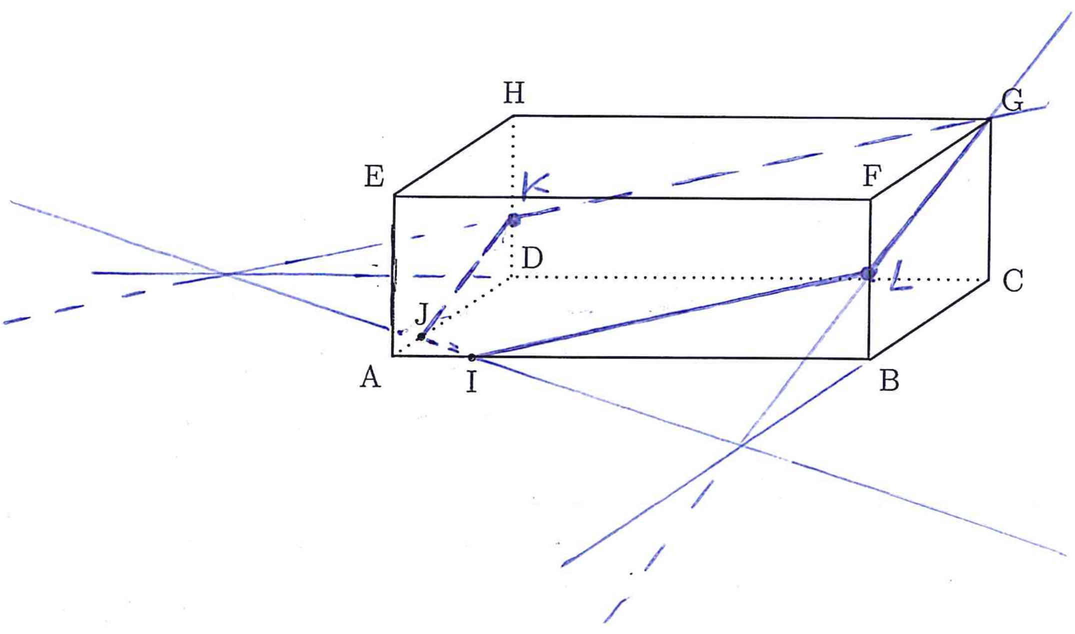
Affirmation 4 : (2 pts) La droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+2 \\ y &=& -2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 3t-1 \end{array}\right.$$

est parallèle au plan $\mathcal{P}\ (I, \vec{u}, \vec{v})$ avec $I(3;0;0)$, $\vec{u}(1;-1;1)$ et $\vec{v}(0;1;-2)$

Exercice 2 (2,5 pts) : Soit le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.
I et J sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, .

Tracer la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (IJG). On ne demande pas de justification.



IJKGL
section

Go3 : OABC tétraèdre avec $(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ orthonormé

16,5

(A) $\vec{OA'} = \frac{2}{3}\vec{OA}$
$\vec{OB'} = \frac{1}{2}\vec{OB}$
$\vec{OC'} = \frac{1}{3}\vec{OC}$

1) $OA = OC$ et $(OA) \perp (OC)$
les points O, A, A', C, C' sont coplanaires
(AC) et (A'C') aussi, non parallèles
$2/3 \neq 1/3$
donc sécantes en R.

1,5

de même, (AB) et (A'B') se coupent en S
et (BC) et (B'C') se coupent en T

2) $R \in (AC) \cap (A'C')$ donc $R \in (ABC) \cap (A'B'C')$
$S \in (AB) \cap (A'B')$ donc $S \in (ABC) \cap (A'B'C')$

1,5

donc (RS) est l'intersection de (ABC) et (A'B'C')
or $T \in (BC) \cap (B'C')$ donc $T \in (ABC) \cap (A'B'C')$
alors $T \in (RS)$

(B) 1) $O(0;0;0)$
$A(1;0;0)$
$B(0;1;0)$
$C(0;0;1)$
$A'(2/3;0;0)$
$B'(0;1/2;0)$
$C'(0;0;1/3)$

1

2) $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $(AC) : \begin{cases} x = -t+1 \\ y = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$

$\vec{A'C'}\begin{pmatrix}-2/3\\0\\1/3\end{pmatrix}$ donc $(A'C') : \begin{cases} x = -2t' + 2/3 \\ y = 0 \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = t' \end{cases}$

$\to \vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ colinéaire

1,5

$\begin{cases} -t+1 = -2t' + \frac{2}{3} \\ 0 = 0 \\ t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1/3 \\ 0 = 0 \\ t' = -1/3 \end{cases}$ ok

1

donc $\boxed{R\left(\frac{4}{3}; 0; -1/3\right)}$

3) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $(AB) : \begin{cases} x = -t+1 \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -t+1 = -4t' + 2/3 \\ t = 3t' \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\vec{A'B'}\begin{pmatrix}-2/3\\1/2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$ colinéaire donc $(A'B') : \begin{cases} x = -4t' + 2/3 \\ y = 3t' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -1/3 \\ t = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$ ok

donc $\boxed{S(2; -1; 0)}$

) $\vec{BC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $(BC) : \begin{cases} x = 0 \\ y = -t+1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$

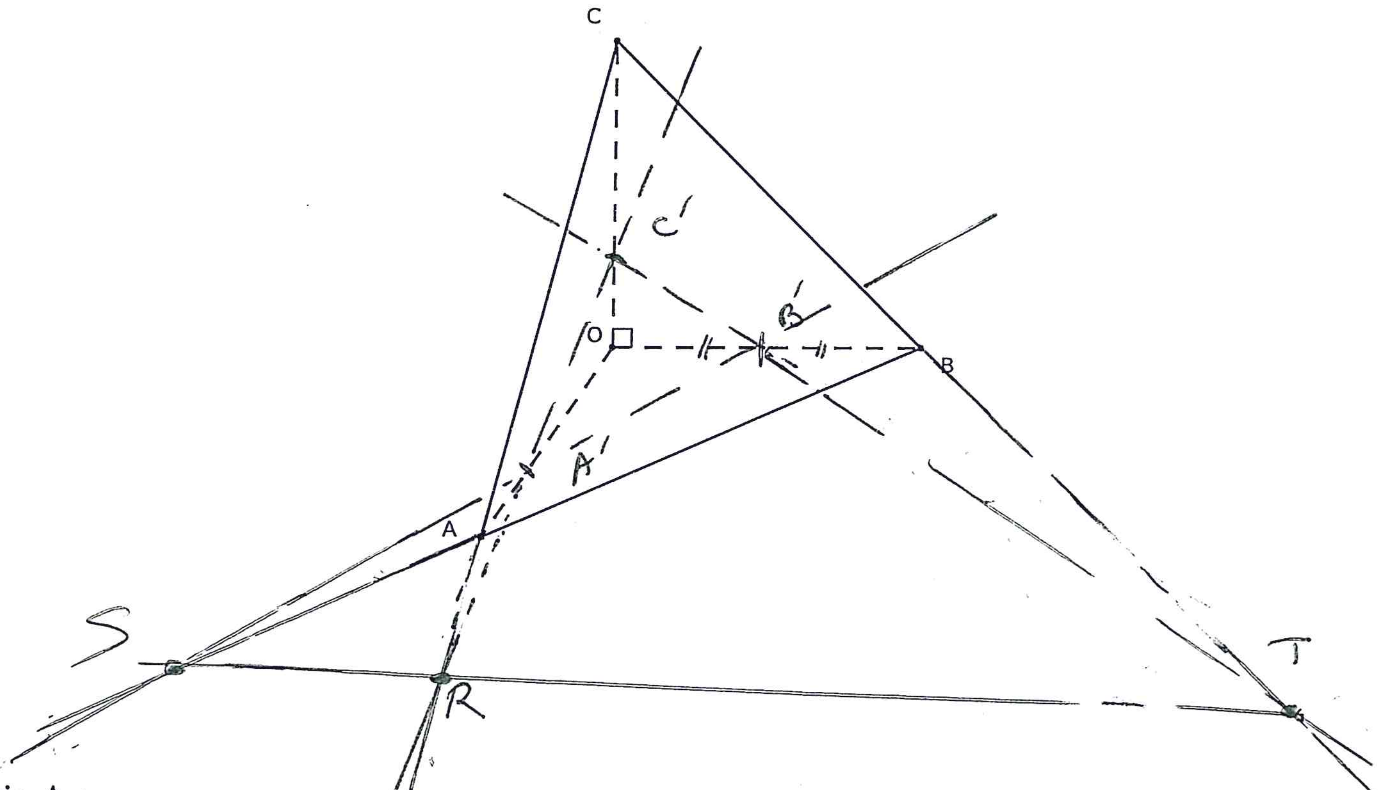
$\begin{cases} 0 = 0 \\ -t+1 = -3t' + 1/2 \\ t = 2t' \end{cases}$

$\vec{B'C'}\begin{pmatrix}0\\-1/2\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$ donc $(B'C') : \begin{cases} x = 0 \\ y = -3t' + 1/2 \\ z = 2t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ t' = -1/2 \\ t = -1 \end{cases}$

donc $\boxed{T(0; 2; -1)}$

Exercice 3 (12 pts) : On considère le tétraèdre $OABC\cancel{D}$; le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est orthonormé.
Soient A', B' et C' les points tels que :

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \text{ et } \overrightarrow{OC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$



Partie A :

1. Justifier que les droites (AC) et $(A'C')$ sont sécantes en un point R.
   En déduire de même que les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes en un point S, et que les droites (BC) et $(B'C')$ sont sécantes en un point T.
2. Montrer que les points R, S et T sont alignés.

Partie B :

1. Donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Donner une représentation paramétrique des droites (AC) et $(A'C')$, puis les coordonnées du point R.
3. Donner une représentation paramétrique des droites (AB) et $(A'B')$, puis les coordonnées du point S.
4. Donner une représentation paramétrique des droites (BC) et $(B'C')$, puis les coordonnées du point T.
5. Montrer que les points R, S et T sont alignés.

5) $R\left(\frac{4}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$

$S(2; -1; 0)$

$T(0; 2; -1)$

$\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{SR}\begin{pmatrix}-2/3\\1\\-1/3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ST}$

$\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires
donc S, R et T alignés