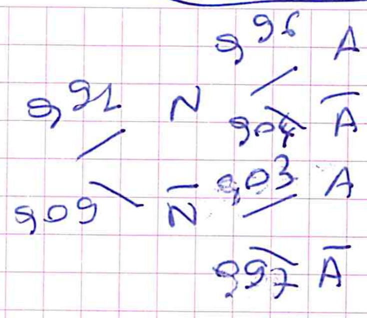
Correction du devoir n°11 - TS

Ex 1 : (A) 1)



2) N et $\bar{N}$ forment une partition de l'univers des peluches. D'après la formule des probabilités totales

$p(A) = p(N \cap A) + p(\bar{N} \cap A)$

donc $p(A) = 0,91 \times 0,96 + 0,09 \times 0,03 = 0,8763$

3) $P_A(N) = \dfrac{P(N \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,91 \times 0,96}{0,8763} \simeq 0,9969$

(B) $D \sim \mathcal{E}_\lambda$ durée de vie d'une peluche en années

1) $p(D \leq 4) = 0,5$ La probabilité que la peluche dure moins de 4 ans est de 0,5 soit la demi-vie d'une peluche est de 4 ans.

$p(D \leq 4) = 0,5 \iff 1 - e^{-4\lambda} = 0,5 \iff e^{-4\lambda} = 0,5$
$\iff -4\lambda = \ln(1/2) = -\ln 2 \iff \boxed{\lambda = \frac{1}{4}\ln 2}$

2) $\lambda = 1/4 \ln 2 \simeq \boxed{0,1733}$

$P_{D \geq 3}(D \geq 3+5) = p(D \geq 5) = e^{-5\lambda} = e^{-5 \times 0,1733} \simeq 0,4204$

Ex 2 : $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1]$ $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1) pour $x \in [0;1]$ $f_n(x) > 0$, f_n continue $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 < 1$ donc I_n est l'aire en u.a du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_n$.

On voit que $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_{100}(x)$ $\forall x \in [0;1]$

donc (I_n) est croissante et semble converger vers 1

2) $I_1 = \int_0^1 \dfrac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$

3) a) $\forall x \in [0;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{n+1}} - \dfrac{1}{1+x^n}$

$= \dfrac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} = \dfrac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}$

$x^n \geq 0$; $1-x \geq 0$; $1+x^n > 0$ et $1+x^{n+1} > 0$

donc $\boxed{f_{n+1}(x) \geq f_n(x)}$

b) f_n continue sur $[0;1]$ et $0<1$

Par passage à l'intégrale :

$\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \geq \int_0^1 f_n(x)\,dx$ soit $\boxed{I_{n+1} \geq I_n}$

donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

4) $x \in [0;1]$, $n \in \mathbb{N}^*$
$\begin{cases} 1 - f_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^n} = \dfrac{x^n}{1+x^n} & x^n \geq 0,\ 1+x^n > 0 \\ f_n(x) - (1-x^n) = \dfrac{1}{1+x^n} - (1-x^n) = \dfrac{1-(1-x^n)(1+x^n)}{1+x^n} \end{cases}$

$= \dfrac{x^{2n}}{1+x^n}$ $x^{2n} \geq 0$ et $1+x^n > 0$

donc $\boxed{1-x^n \leq f_n(x) \leq 1}$

5) $x \mapsto 1-x^n$ et f_n continues sur $[0;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$0<1$ donc $\int_0^1 (1-x^n)\,dx \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq 1\times(1-0)$

soit $\left[x - \dfrac{x^n}{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq 1$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{n}{n+1} \leq I_n \leq 1}$

6) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1

donc convergente

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$

D'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$

Ex 3 : $f(x) = \ln(-2x^2 + 13{,}5)$ sur $[-2{,}5 ; 2{,}5]$

A 1) f est dérivable sur $[-2{,}5 ; 2{,}5]$ comme composée car $-2x^2 + 13{,}5 > 0$

$f'(x) = \dfrac{-4x}{-2x^2+13{,}5} = \dfrac{4x}{2x^2 - 13{,}5}$

2) $-2x^2 + 13{,}5 > 0$ sur $[-2{,}5 ; 2{,}5]$ donc $2x^2 - 13{,}5 < 0$
donc $f'(x)$ est du signe contraire de $4x$

x	$-2{,}5$		0		$2{,}5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(13{,}5)$	$\searrow$	0

0 est le minimum de f atteint en $x = -2{,}5$ et $x = 2{,}5$
donc $f(x) \geq 0$ sur $[-2{,}5 ; 2{,}5]$

B 1) $f(0) = \ln(13{,}5) \simeq 2{,}6$ $\quad f(0) \neq 2{,}5$
donc $\mathcal{C}$ n'est pas un arc de cercle de centre O

2) f continue positive sur $[-2{,}5 ; 2{,}5]$
donc $\mathcal{A} = \int_{-2{,}5}^{2{,}5} f(x)\,dx$ u.a.

$\mathcal{C}$ est symétrique / (Oy) donc $\mathcal{A} = 2\int_0^{2{,}5} f(x)\,dx$ u.a
et 1 u.a $= 2 \times 2\ m^2 = 4\ m^2$
donc $\boxed{\mathcal{A} = 8\int_0^{2{,}5} f(x)\,dx}$ (m^2)

3) a) Etape 1 $\quad R = \dfrac{2{,}5}{50} \times f\left(\dfrac{2{,}5}{50}\right) \simeq 0{,}130\,116 = S$

Etape 4 $\quad S = 0{,}390\,144 + 0{,}129\,837 = 0{,}519\,981$

Etape 50 $\quad R = \dfrac{2{,}5}{50} \times f(2{,}5) = 0$ et $S = 5{,}197\,538$

Affichage $\quad \underline{S = 5{,}197\,538}$

b) L'algorithme calcule une valeur approchée a de I par la méthode des rectangles, soit $a \simeq 5{,}197\,538$

or $a \leq I \leq a + \dfrac{f(0) - f(2{,}5)}{50} \times 2{,}5$

donc $5{,}197\,538 \leq I \leq 5{,}327\,672$

or $A = 8I$ donc $41{,}58 \leq \mathcal{A} \leq 42{,}62$

soit $\mathcal{A} \simeq 42\ m^2$