Devoir n°10 - Nombres Complexes - TS

21 février 2018 - 1h

Exercice 1 (7 pts) : *Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.*
Indiquer si chacune des affirmations est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
Soit z un nombre complexe de la forme $x+\mathrm{i}y$, où x et y sont des réels.
Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}}=-1-\mathrm{i}$; $z_{\mathrm{B}}=2-2\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}}=1+5\mathrm{i}$.
On pose $Z=\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}}$

1. **Affirmation 1** : Le nombre complexe $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.
2. **Affirmation 2** : $\mathcal{E}=\{M(z)/|z-\mathrm{i}|=|z+1|\}$ est une droite qui passe par I d'affixe $z_I=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{2}$.
3. **Affirmation 3** : Le triangle ABC n'est pas rectangle en A. (aide : déterminer la forme algébrique de Z)
4. **Affirmation 4** : $\mathcal{C}=\{M(z)/|z-1+\mathrm{i}|=|\sqrt{3}-\mathrm{i}|\}$ est un cercle passant par J d'affixe $z_J=1+\mathrm{i}$.

Exercice 2 (5 pts) : Les questions 1. et 2. peuvent être traitées de manière indépendante.
On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n=\frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}.$$

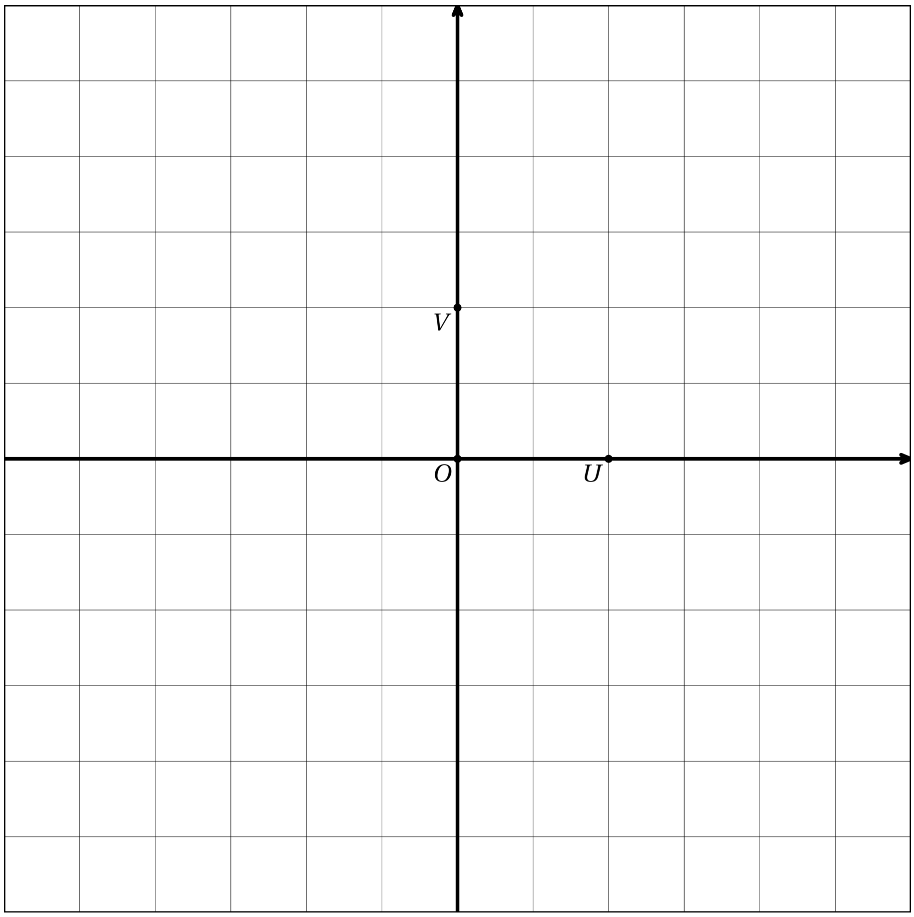
On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   b) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.
2. a) Donner la forme exponentielle des nombres complexes $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.
   b) En déduire la forme exponentielle du nombre z_n.
   c) Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

Exercice 3 (8 pts) : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe : $f(z)=z^2+2z+9$

1. Calculer l'image de $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z)=5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation
   (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive). Laisser les traits de construction apparents.
3. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie
   $$|f(z)-8|=3.$$
   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$; tracer (F).
4. Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est
   $$x^2-y^2+2x+9+\mathrm{i}(2xy+2y).$$
   b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique en traçant ces droites.
5. **Bonus :** Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).


V
O
U