Correction du devoir n°10 - TS

Ex 1 : 1) $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$

donc $(1+i\sqrt{3})^4 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$= 16\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{-8-8i\sqrt{3}} \notin \mathbb{R}$ Faux

2) $\mathcal{E} = \{M(z) / |z-i| = |z+1|\}$ Soient $D(i)$ et $E(-1)$

$M(z) \in \mathcal{E} \iff DM = EM$; $\mathcal{E}$ est la médiatrice de $[DE]$; elle passe donc par le milieu de $[DE]$ d'affixe $\frac{z_D+z_E}{2} = \frac{-1+i}{2}$ c'est donc I

Vrai

3) $\begin{cases} z_A = -1-i \\ z_B = 2-2i \\ z_C = 1+5i \end{cases}$ $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2+6i}{3-i} = \frac{2(1+3i)}{3-i} \times \frac{(3+i)}{(3+i)}$

$= \frac{2(3+i+9i+3i^2)}{9+1} = \frac{2\times 10i}{10}$

Donc $Z = 2i$ alors $\arg Z = \arg(2i)\ (2\pi) = \pi/2\ (2\pi)$

or $\arg Z = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})\ (2\pi)$ donc $(AB) \perp (AC)$

Ainsi ABC est un triangle rectangle en A

Faux

4) $\mathcal{E} = \{M(z) / |z-1+i| = |\sqrt{3}-i|\}$

$|\sqrt{3}-i|^2 = 3+1 = 4 \iff |\sqrt{3}-i| = 2$ Soit $K / z_K = 1-i$

$M(z) \in \mathcal{E} \iff MK = 2$ donc $\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{C}(K;2)}$

$J(1+i)$

$\overrightarrow{KJ}(2i)$ alors $KJ = |2i| = 2$ donc $\underline{J \in \mathcal{E}}$ VRAI

Ex 2 : $z_n = \frac{1+i}{(1-i)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ Soit $A_n(z_n)$

1) a) $\frac{z_{n+4}}{z_n} = \frac{1+i}{(1-i)^{n+4}} \times \frac{(1-i)^n}{1+i} = \frac{1}{(1-i)^4} = \frac{1}{((1-i)^2)^2} = \frac{1}{(-2i)^2}$

$\Rightarrow \frac{z_{n+4}}{z_n} = \frac{1}{4i^2} = \frac{-1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{z_{n+4}}{z_n} \in \mathbb{R}$

b) $\arg\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right) = \arg\left(\frac{-1}{4}\right)\ (2\pi) = \pi\ (2\pi)$

or $\overrightarrow{OA}_{n+4}(z_{n+4})$ et $\overrightarrow{OA}_n(z_n)$

donc $(\overrightarrow{OA}_n ; \overrightarrow{OA}_{n+4}) = -\pi\ (2\pi)$ soit O, A_n et A_{n+4} sont alignés

2) a) $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

b) $z_n = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^n} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^n} \times \frac{e^{i\pi/4}}{e^{-ni\pi/4}}$

alors $\boxed{z_n = (\sqrt{2})^{1-n} e^{(1+n)\frac{\pi}{4}i}}$

c) z_n réel $\iff \arg z_n = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\iff (1+n)\frac{\pi}{4} = k\pi \iff 1+n = 4k \iff \boxed{n = 4k-1}$

Ex 3 : $f(z) = z^2 + 2z + 9 \quad (z \in \mathbb{C})$

1) $\boxed{f(-1+i\sqrt{3})} = (-1+i\sqrt{3})^2 + 2(-1+i\sqrt{3}) + 9$
$= (1-3) - 2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$

2) $f(z) = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 9 = 5 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 16 = -12 \qquad \Delta < 0$

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3} \\ z_2 = \bar{z_1} = -1-i\sqrt{3} \end{cases}$ (vu en question 1)

$S = \{z_1 ; z_2\}$ $\quad z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ et $z_2 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$A(-1+i\sqrt{3})$ et $B(-1-i\sqrt{3})$

3) $|f(z) - 8| = |z^2 + 2z + 9 - 8| = |z^2 + 2z + 1| = |(z+1)^2|$

donc $|f(z) - 8| = 3 \Leftrightarrow |(z+1)^2| = 3 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 3$

$\Leftrightarrow |z+1| = \sqrt{3}$ $\qquad \Omega(-1;0)$ soit $z_\Omega = -1$

$\Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{3}$ $\qquad M(z)$

$\boxed{(F) = \mathcal{C}(\Omega ; \sqrt{3})}$ (c'est vérifié)

4) $z = x + iy \ / \ x, y \in \mathbb{R}$

a) $f(z) = (x+iy)^2 + 2(x+iy) + 9$
$= x^2 - y^2 + 2xyi + 2x + 2iy + 9$
$= (x^2 - y^2 + 2x + 9) + i\,(2xy + 2y)$

b) $f(z)$ réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f(z) = 0 \Leftrightarrow 2xy + 2y = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)y = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $y = 0$

(E) est la réunion des deux droites

$(D_1) : x = -1$ et $(D_2) : y = 0$ (axe des abscisses)

Bonus : $M(x;y) \in \mathcal{C}(\Omega ; \sqrt{3}) \Leftrightarrow \Omega M^2 = 3$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-0)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 1 = 3$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0}$

si $x = -1$, on a $y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{3}$ On retrouve A et B

si $y = 0$, on a $x^2 + 2x - 2 = 0$

$\Delta = 4 + 8 = 12$ $\qquad x_1 = \dfrac{-2+\sqrt{12}}{2} = -1+\sqrt{3}$ ou $x_2 = -1-\sqrt{3}$

Donc (E) et (F) se coupent en 4 points

- A, B
- $J_1(-1+\sqrt{3} ; 0)$ et $J_2(-1-\sqrt{3} ; 0)$