Correction du devoir n° 6 - TS

Ex 2 : $f(x) = x+1+\frac{x}{e^x}$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

(A) $g(x) = 1-x+e^x$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

1) • $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ Par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

• $g(x) = 1 + x\left(-1+\frac{e^x}{x}\right)$ $(x\neq 0)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$ croissances comparées

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

Par produit et somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2) $g'(x) = -1+e^x$

$g'(x)\geq 0 \iff -1+e^x\geq 0 \iff e^x\geq 1 \iff x\geq 0$ ($x\mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3) 2 est le minimum pour $g(x)$ atteint en $x=0$ donc $\boxed{g(x)\geq 2>0}$

(B) 1) • $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$

Par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ $\quad \frac{x}{e^x}=\frac{1}{e^x/x}$ $(x\neq 0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) $f'(x) = 1+\frac{1\times e^x - x\times e^x}{(e^x)^2} = 1+\frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = 1+\frac{1-x}{e^x}$

$=\frac{e^x+1-x}{e^x}=\frac{g(x)}{e^x}=e^{-x}g(x)$

3) $e^{-x}>0$ sur $\mathbb{R}$, $g(x)>0$ donc $f'(x)>0$

et f strictement croissante

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

4) f continue sur $\mathbb{R}$
f strictement croissante
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$0 \in]-\infty ; +\infty[$

D'après le corollaire du théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

de plus $f(-1) = \frac{-1}{e^1} = -e$ (<0)
$f(0) = 1$ (>0)
donc $-1 < \alpha < 0$

C 1) T : $y = f'(0)\times(x-0) + f(0)$ $\qquad f'(0) = g(0) = 2$
$\boxed{y = 2x+1}$

2) $f(x) - (2x+1) = x+1+\frac{x}{e^x} - 2x - 1 = \frac{x}{e^x} - x$
$= x\left(\frac{1}{e^x} - 1\right) = x\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right)$ du signe de $x(1-e^x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$1-e^x$	$+$	0	$-$
$f(x)-(2x+1)$	$-$	0	$-$

opposé de $g'(x)$

$\mathcal{C}$ est toujours au-dessous de T
$\mathcal{C}$ et T se coupent en $A(0;1)$.

D 1)

a	-1	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$
$f(a)$	<0	<0	<0	<0	<0	<0	>0

pour $k=1$

pour $k=1$ $\quad a = -0,5$
pour $k=2$ $\quad a = -0,41$
pour $k=3$ $\quad a = -0,402$

2) L'algorithme affiche la valeur approchée par défaut de α à 10^{-k} près pour un k donné.

Ex3 : (A) $f(x) = (ax+b)\,e^{-x}$ définie sur $[1;8]$

1) f dérivable sur $[1;8]$ comme composée et produit

$f'(x) = a e^{-x} + (ax+b)\,e^{-x} \times (-1)$

$= (a - b - ax)\,e^{-x}$

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est horizontale $\iff f'(1) = 0 \iff -b e^{-1} = 0$ $(e^{-1} \neq 0)$

$\iff b = 0$

2) $f(x) = ax\,e^{-x}$ $\quad 3,5 \leq f(1) \leq 4$

$\iff 3,5 \leq \frac{a}{e} \leq 4 \iff 3,5\,e \leq a \leq 4e$

$\approx 9,5 \qquad 10,9$

a est un entier donc $a = 10$

Alors $\boxed{f(x) = 10x\,e^{-x}}$

(B) 1) $a = 10$, $b = 0$ donc $f'(x) = (10 - 0 - 10x)\,e^{-x}$

$= \boxed{10(1-x)\,e^{-x}}$ dérivable comme composée et produit

$f''(x) = 10\left[-e^{-x} + (1-x)\,e^{-x} \times (-1)\right]$

$= 10\,e^{-x}(-1-1+x) = \boxed{10(x-2)\,e^{-x}}$

$10e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x-2)$

x	1		2		8
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

donc

x	1		2		8
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-10e^{-2}$	$\nearrow$	$-70\,e^{-8}$

2) Dans le triangle MPL rectangle en P

$\tan\alpha = \frac{MP}{PL} = |f'(x)|$ coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en M (en valeur absolue)

(α angle aigu donc $\tan\alpha > 0$)

3) $f'(x) \leq 0$ sur $[1;8]$

$f'(2)$ est le minimum pour $f'(x)$ sur $[1;8]$

Par symétrie $|f'(2)|$ est le maximum pour $|f'(x)|$ sur $[1;8]$

$\tan\alpha = |f'(2)| = \frac{10}{2} \iff \alpha \simeq 53,5°$

La valeur maximale pour α est inférieure à $55°$ donc le Toboggan est conforme aux contraintes.

Ex1 : On veut montrer par récurrence que
$\exp(nx) = (\exp x)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

- Initialisation : pour $n = 0$
  $\exp 0 = 1$ (prérequis)
  $(\exp x)^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ vrai pour $n = 0$
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ ~~tel~~ que $\exp(kx) = (\exp x)^k$

alors $\exp((k+1)x) = \exp(kx + x)$
$= \exp(kx)\exp(x)$ (pré-requis)
$= (\exp x)^k \times \exp x$
$= (\exp x)^{k+1}$ vrai au rang $k+1$

- Conclusion : $\begin{cases} \text{vrai pour } n = 0 \\ \text{héréditaire} \end{cases}$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exp(nx) = (\exp x)^n$

Ex4 : $f_k(x) = e^x - kx$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$
$f'_k(x) = e^x - k$

L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$
$A(a ; f_k(a)) \in (Ox) \iff f_k(a) = 0 \iff \boxed{e^a = ka}$

de plus le coefficient directeur de (Ox) est nul
il s'agit donc de résoudre $f'_k(a) = 0$
$\iff e^a = k \iff a = \ln k$

on a donc $e^{\ln k} = k \times \ln k$
$\iff k = k \times \ln k$
$\iff \ln k = 1$
$\iff k = e$

$\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses comme tangente pour $k = e$ en $A(1 ; 0)$