# Correction du devoir n°2 – TS

**Ex 1 :** $f(x) = (\cos x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$

1) ⓐ $f(-x) = (\cos(-x))^2 = (\cos x)^2 = f(x)$

donc $f$ est paire — 0,75

ⓑ $f$ semble périodique de période $\pi$

$f(x+\pi) = (\cos(x+\pi))^2 = (-\cos x)^2 = (\cos x)^2 = f(x)$

donc $f$ est $\pi$-périodique — 1

/4

2) $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2\cos x \times (-\sin x)$

$\boxed{f'(x) = -2\cos x \sin x}$

1

$(\text{ou } -\sin(2x))$

3) sur $[-\pi/2 ; \pi/2]$, $\cos x \geq 0$

$\sin x < 0 \iff -\pi/2 \leq x < 0$

et $\sin x \geq 0 \iff 0 \leq x \leq \pi/2$

$-2 < 0$ — 0,75 — donc

+ 0,5

| $x$ | $-\pi/2$ | | $0$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

---

**Ex 3 :** $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n+2}$ et $-1 \leq u_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

/3

1) $-1 \leq u_n \leq 2$

$\iff 1 \leq u_n + 2 \leq 4$

$\iff 1 \geq \dfrac{1}{u_n+2} \geq \dfrac{1}{4}$   $x \mapsto 1/x$ strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

$\iff -2 \leq \dfrac{-2}{u_n+2} \leq -\dfrac{1}{2}$

1,5

$\iff -1 \leq v_n \leq 1/2$   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Bornée

2) $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{2}{u_{n+1}+2} + \dfrac{2}{u_n+2} = 2\,\dfrac{-(u_n+2) + (u_{n+1}+2)}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)}$

$= 2\,\dfrac{u_{n+1} - u_n}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)}$

1,5

$u_n + 2 > 0$   donc $(v_{n+1} - v_n)$ est du signe de $(u_{n+1} - u_n)$

$u_{n+1} + 2 > 0$   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a le même sens de variation

$2 > 0$   que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$(u_n) \searrow \implies (v_n) \searrow$

Ex 2 : 1) $u_0 = 1000$ (1 kg = 1000 g de bactéries initialement)

ⓐ $u_{n+1} = 1{,}2\, u_n - 100$ → 100 g de perte par jour

↳ augmentation de 20 % par jour $\left(\times\left(1+\frac{20}{100}\right)\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$u_n$ est la masse de bactéries en g le $n$ième jour. 0,75

ⓑ il s'agit de résoudre $u_n > 30\,000$

30 kg = 30 000 g

$\begin{cases} u_{22} < 30\,000 \\ u_{23} > 30\,000 \end{cases}$ Au bout de 23 jours la masse de bactéries dépassera 30 kg 0,75

ⓒ Algorithme Tant que $u \leq 30\,000$ faire

$u \leftarrow 1{,}2 \times u - 100$

$n \leftarrow n+1$

Fin Tant que

Afficher $n$ 0,75

2) ⓐ On veut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 1000$ 0,25

• initialisation : pour $n = 0$ $u_0 = 1000$ donc vrai 0,25

• hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \geqslant 1000$

on veut montrer que $u_{k+1} \geqslant 1000$. 0,25

or $u_{k+1} = 1{,}2 \times u_k - 100$ $u_k \geqslant 1000$ 1

$\Rightarrow 1{,}2 \times u_k \geqslant 1200$

$\Rightarrow u_{k+1} \geqslant 1100 > 1000$

vrai au rang $k+1$

• conclusion : la propriété est vraie pour $n=0$, elle est héréditaire 0,25

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 1000}$

ⓑ $u_{n+1} - u_n = 1{,}2u_n - 100 - u_n$
$= 0{,}2\,u_n - 100$ $\forall n \in \mathbb{N}$

or $u_n \geq 1000$ donc $0{,}2u_n \geq 200$
et $0{,}2u_n - 100 \geq 100 > 0$

1 Alors $u_{n+1} - u_n > 0$ : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3) $v_n = u_n - 500$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ⓐ $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1{,}2u_n - 100 - 500$
$= 1{,}2u_n - 600 = 1{,}2\,(u_n - 500) = 1{,}2\, v_n$
$\forall n\in\mathbb{N}$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1{,}2$ de premier terme $v_0 = 500$

1

$v_0 = u_0 - 500$
$= 500$

0,25

ⓑ $v_n = 500 \times 1{,}2^n$ et $u_n = v_n + 500$

0,5 soit $\boxed{u_n = 500 \times 1{,}2^n + 500}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ⓒ $1{,}2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$

1 Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

---

Ex 4 : $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$

$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) = 3 - \dfrac{4}{u_n+1} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) ⓐ graphique 0,5

ⓑ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et semble converger vers 1 0,5

2) ⓐ on veut montrer par récurrence que
$u_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 0,25

- pour $n=0$ $u_0 = 4$ et $4 > 1$ vrai 0,25
- soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \geq 1$
on veut montrer que $u_{k+1} \geq 1$ 0,25

or $u_{k+1} = 3 - \dfrac{4}{u_k + 1}$

$$u_k \geq 1$$
$$\Rightarrow u_k + 1 \geq 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{u_k+1} \leq 1/2$$
$$\xrightarrow{\times(-4)} \frac{-4}{u_k+1} \geq -2$$
$$\xrightarrow{+3} u_{k+1} \geq 1$$

vrai au rang $(k+1)$ 1,5

- la propriété est vraie pour $n=0$,
elle est héréditaire 0,25
donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 1}$

ⓑ $u_{n+1} - u_n = 3 - \dfrac{4}{u_n+1} - u_n$

$$= \frac{3(u_n+1) - 4 - u_n(u_n+1)}{u_n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n+1} = \frac{-(u_n-1)^2}{u_n+1}$$

1,5

$(u_n - 1)^2 \geq 0$
$u_n + 1 > 0$ car $u_n \geq 1$
Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$
soit $\boxed{u_{n+1} \leq u_n}$ !

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

ⓒ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1
donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$ $(\ell \geq 1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc $\ell$ vérifie $\ell = f(\ell)$

$\Rightarrow \boxed{\ell = 1}$ th du point fixe

(calcul : $x = f(x)$ ...)