Correction du dev 1 - 1S

Ex 1 : $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ $(x \in \mathbb{R})$

1) $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$
donc 2 est racine de P

2) $P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c) = (x-2)(x^2+bx-3)$
$= x^3 + bx^2 - 3x - 2x^2 - 2bx + 6$
$= x^3 + (b-2)x^2 + (-3-2b)x + 6$

Par identification

$\begin{cases} b-2 = -4 \\ -3-2b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ -3 - 2\times(-2) = 1 \text{ vérifié} \end{cases}$

donc $\boxed{P(x) = (x-2)(x^2-2x-3)}$

3) $P(x) = (x-2)(x^2-2x-3)$

$P(x) = x^2 - 2x - 3$
$\Delta = 4 + 12 = 16$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
x^2-2x+6	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	
$P(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	

du signe de $a=1$ à l'extérieur des racines

$P(x) \leq 0$ $\boxed{S =]-\infty ; -1] \cup [2 ; 3]}$

Ex 2 : 1) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; $x \in]-\pi ; \pi]$

on pose $X = \sin x$ $X \in [-1 ; 1]$
l'équation devient $2X^2 + X - 1 = 0 \Longleftrightarrow 2(X+1)(X-\frac{1}{2}) = 0$
(-1 est racine évidente) $\Longleftrightarrow X = -1$ ou $X = \dfrac{1}{2}$

$\sin x = -1$ ou $\sin x = 1/2$
$\Longleftrightarrow x = -\pi/2$ ou $x = \pi/6$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$ $\boxed{S = \left\{ -\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6} \right\}}$

2) $2x + \sqrt{x} - 1 = 0$; $x \in [0 ; +\infty[$
on pose $X = \sqrt{x}$ $X \in [0 ; +\infty[$
l'équation devient $2X^2 + X - 1 = 0 \Longleftrightarrow \cancel{X = -1}$ ou $X = 1/2$

$\sqrt{x} = 1/2 \Longleftrightarrow x = 1/4$ $\boxed{S = \{1/4\}}$

Ex3 : (E_m) : $(m-1)x^2+2mx+m-1=0$ $\begin{pmatrix} m\in\mathbb{R} \\ x\in\mathbb{R}\end{pmatrix}$

• si $m=1$ $\quad (E_1)$: $2x=0 \iff x=0$
l'équation est du 1er degré et admet une seule solution

si $m\neq 1$ $\quad (E_m)$ est une équation du 2nd degré

$$\Delta_m = 4m^2-4(m-1)^2 = 4m^2-4(m^2+2m-1) = -8m+4$$

m	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$\Delta_m = -8m+4$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

pour $m<1/2$ $\quad \Delta_m>0$ $\quad (E_m)$ admet 2 solutions
pour $m=1/2$ $\quad \Delta_m=0$ $\quad (E_m)$ admet une seule solution
pour $1/2<m<1$ et $1<m$ $\quad \Delta_m<0$
(E_m) n'admet aucune solution

Ex4 : 1) $\cos(3x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ sur $]-\pi;\pi]$

$\iff 3x = \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $3x = \dfrac{-5\pi}{6}+2k'\pi$ $\quad (k,k'\in\mathbb{Z})$

$\iff x = \dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{-5\pi}{18}+\dfrac{2k'\pi}{3}$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{17\pi}{18}; \frac{-7\pi}{18}; \frac{-5\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{7\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}\right\}}$$

2) $2\sin^2x-1\geq 0$ sur $[0;2\pi[$

$\iff \sin^2x \geq 1/2$

$\iff \sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x \leq \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]}$$

Ex5 : $\cos a = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $a\in[0;\pi/2[$ $\quad \begin{cases}\sin a\geq 0\\ \cos a>0\end{cases}$

• $\sin^2 a = 1-\cos^2 a$
$= 1-\left(\dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}\right)$
$= \dfrac{8-4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

• $\cos(2a) = 2\cos^2a-1$
$= 2\left(\dfrac{8+4\sqrt{3}}{16}\right)-1$
$= \dfrac{8\sqrt{3}}{16} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• $\cos(2a) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff 2a = \dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2a = \dfrac{-\pi}{6}+2k'\pi$ $\quad k,k'\in\mathbb{Z}$

$\iff a = \dfrac{\pi}{12}+k\pi$ ou $a = \dfrac{-\pi}{12}+k'\pi$

$a = \pi/12$