Correction du devoir n° 13 – TS

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (D) $\qquad \vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ vecteur normal de (P)

$(P) : x-2y+3z+5=0$

- $A(-8;3;2)$ $\quad -8-2\times3+3\times2+5\neq0 \quad A\notin(P)$
- $\vec{u}$ et $\vec{n}$ non colinéaires
- $\vec{u}\cdot\vec{n}=1+2-3=0 \iff \vec{u}\perp\vec{n} \iff (D)\,//\,(P)$

$B(-2;0;-1)\in(D)$ et $-2-0-3+5=0$ donc $B\in(P)$

alors $\underline{(D) \text{ est une droite de } (P)}$ ⓒ

2) $\vec{MN}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{MN}\cdot\vec{u}=2+4-6=0$

$\iff \vec{MN}\perp\vec{u} \iff \underline{(MN)\perp(D)}$ ⓐ

3) $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs de (S) non colinéaires

- $\begin{cases}\vec{v}\cdot\vec{n}=1+0-3\neq0 & \vec{v}\not\perp\vec{n}\\ \vec{w}\cdot\vec{n}=2+4+9\neq0 & \vec{w}\not\perp\vec{n}\end{cases}$

- $t-2(-2-t)+3(-3-t)+5=t+4+2t-9-3t+5=0$

donc $(\Delta)\subset(P)$

$(k,t,t'\in\mathbb{R})$

$\begin{cases}k=-2+t+2t' & (1)\\ -2-k=-t-2t' & (2)\\ -3-k=-1-t+3t' & (3)\end{cases}$

$(\Delta) \qquad (S)$

$(1)+(2)$ $\quad -2=-2$ ok

$(1)+(3)$ $\quad -3=-3+5t' \iff t'=0$

$t=k+2$

donc $\boxed{(\Delta)\subset(S)}$ $\longrightarrow$ ⓑ

- $M(-1;2;3)$ $\quad -1-4+9+5=9 \Rightarrow M\notin(P)$

$\begin{cases}-1=-2+t+2t' & (1)\\ 2=-t-2t' & (2)\\ 3=-1-t+3t'\end{cases}$

$(1)+(2)$ $\quad 1=-2$ faux $M\notin(S)$

Ex2

$A(0;4;1)$

$B(1;3;0)$

$C(2;-1;-2)$

$D(7;-1;4)$

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires (coordonnées non proportionnelles)

donc A, B, C non alignés et définissent le plan (ABC)

1

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 2+1-3=0\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 4+5-9=0\end{cases}$ $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$

ⓐ vecteur directeur de (Δ) donc $\boxed{\Delta\perp(ABC)}$

1

ⓑ alors $\vec{u}$ vecteur normal au plan (ABC)

$2x-y+3z+d=0$ $(d\in\mathbb{R})$

$A(0;4;1)\in(ABC) \Leftrightarrow 0-4+3+d=0 \Leftrightarrow d=1$

0,75

donc (ABC) : $\boxed{2x-y+3z+1=0}$

ⓒ Δ de vecteur directeur $\vec{u}$ passe par $D(7;-1;4)$ donc $\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=7+2t\\y=-1-t\\z=4+3t\end{cases}}$ $(t\in\mathbb{R})$

0,5

ⓓ $t=-2$ $\boxed{H(3;1;-2)}$ 0,75

3) (P_1): $x+y+z=0$

(P_2) : $x+4y+2=0$

ⓐ $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ vecteurs normaux à (P_1) et (P_2)

$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires

0,75 alors (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles : ils sont donc sécants.

ⓑ (d) $\begin{cases}x=-4t-2\\y=t\\z=3t+2\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

$(-4t-2)+t+(3t+2)=0$

$(-4t-2)+4t+2=0$

$\forall t\in\mathbb{R}$

0,75

donc $(d)\subset(P_1)$ et $(d)\subset(P_2)$ alors (P_1) et (P_2) se coupent suivant (d)

ⓒ soit $\vec{d}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d)

$\vec{u}\cdot\vec{d}=-8-1+9=0$

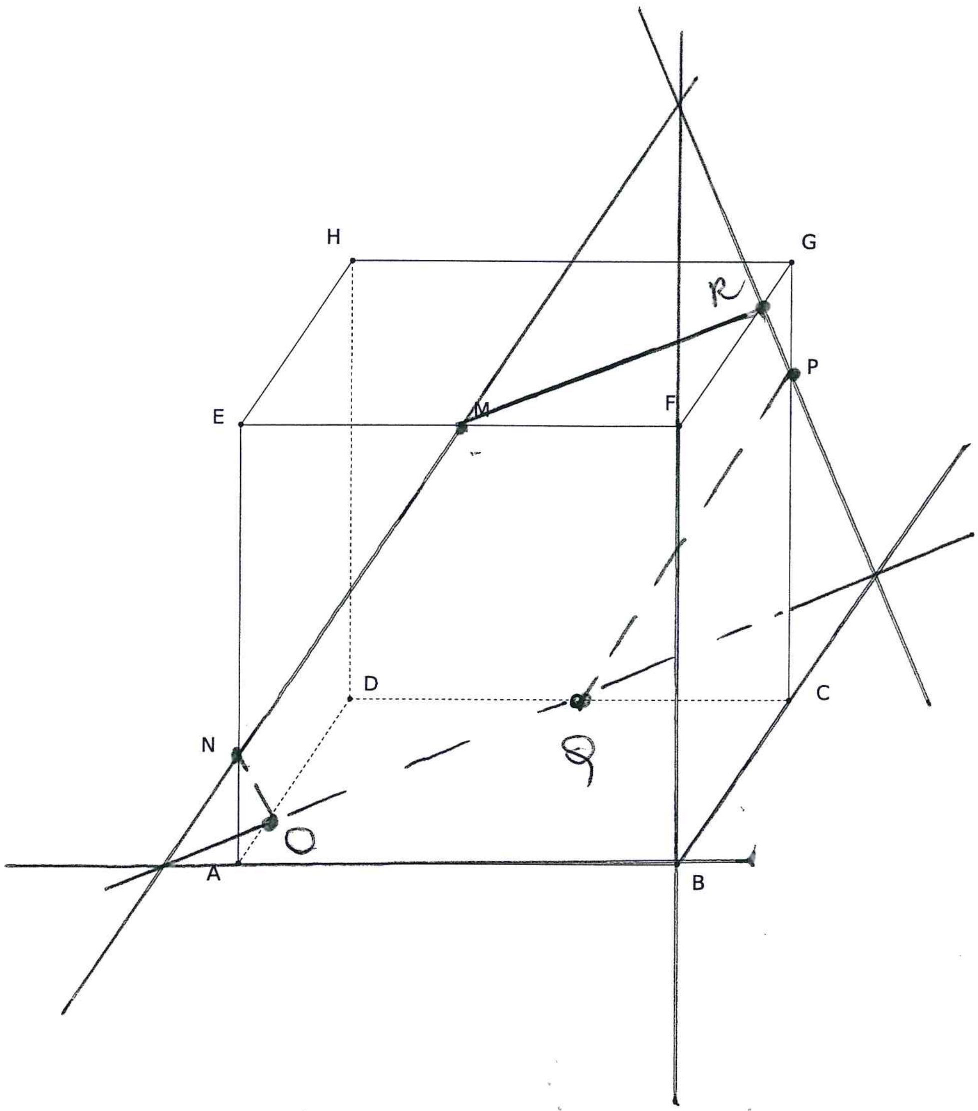
0,75

$\vec{u}\perp\vec{d}$ donc $\boxed{(d)\,/\!/\,(ABC)}$

Exercice 3 (2,5 pts) : On considère un cube $ABCDEFCH$.

On note M le milieu du segment $[EF]$, N le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et P le point tel que $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CG}$.

Construire la section du cube par le plan (MNP).



Section MRPQON

Ex 4 : (A) $f(x) = (x+1)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
Par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

0,5

$f(x) = xe^x + e^x$
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ croissances comparées
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 0,5

2) f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit
$f'(x) = 1 \times e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$ 0,5

3) $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$
donc $f'(x) > 0$ est du signe de $(x+2)$

1

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

(B) $g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$

0,5

1) (a) $g_m(x) = 0 \iff x+1 = me^{-x} \iff (x+1)e^x = m \iff f(x) = m$

(b) $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses $\iff g_m(x) = 0 \iff f(x) = m$

$m < \frac{-1}{e^2}$ pas de point d'intersection
$m = \frac{-1}{e^2}$ un seul point d'intersection
$-\frac{1}{e^2} < m < 0$ deux points d'intersections
$m \geq 0$ un seul point d'intersection 1

2) $-e < \frac{-1}{e^2}$ donc pas de point d'intersection
donc $\mathcal{C}_{-e}$ est la courbe 1

$g_0(x) = x+1$ fonction affine donc $\mathcal{C}_0$ est une droite : c'est la courbe 2 0,75

Alors la courbe 3 est $\mathcal{C}_e$.

3) $g_m(x) - (x+1) = -me^{-x}$ $\quad e^{-x} > 0$ $\quad$ <u>$\mathcal{D}$ est $\mathcal{C}_0$</u>

<u>donc</u> du signe de $(-m)$

1/ $\begin{cases} m>0 : g_m(x) - (x+1) < 0 \text{ donc } \mathcal{C}_m \text{ au-dessous de } \mathcal{D} \\ m=0 : \mathcal{C}_0 \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont confondues} \\ m<0 : g_m(x) - (x+1) > 0 \text{ donc } \mathcal{C}_m \text{ au-dessus de } \mathcal{D} \end{cases}$

4) ⓐ graphique $\quad$ 0,5

ⓑ $\mathcal{D}_a = \{ M(x;y) / 0 \le x \le a ; g_e(x) \le y \le g_{-e}(x) \}$

$\Delta_a : x = a$

$a \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0;a]$, $\mathcal{C}_{-e}$

est au-dessus de $\mathcal{C}_e$ donc $g_{-e}(x) \geq g_e(x)$

$x \mapsto g_m(x)$ continues sur $\mathbb{R}$

0,75 <u>donc</u> $\mathcal{A}(a) = \int_0^a g_{-e}(x) - g_e(x)\, dx$ $\quad (u\text{-}a)$

<u>or</u> $g_{-e}(x) - g_e(x) = (x+1+ee^{-x}) - (x+1-e e^{-x})$

$= e^{1-x} + e^{1-x} = 2e^{1-x}$

<u>Alors</u> $\mathcal{A}(a) = \int_0^a 2e^{1-x}\, dx = \left[-2e^{1-x}\right]_0^a$

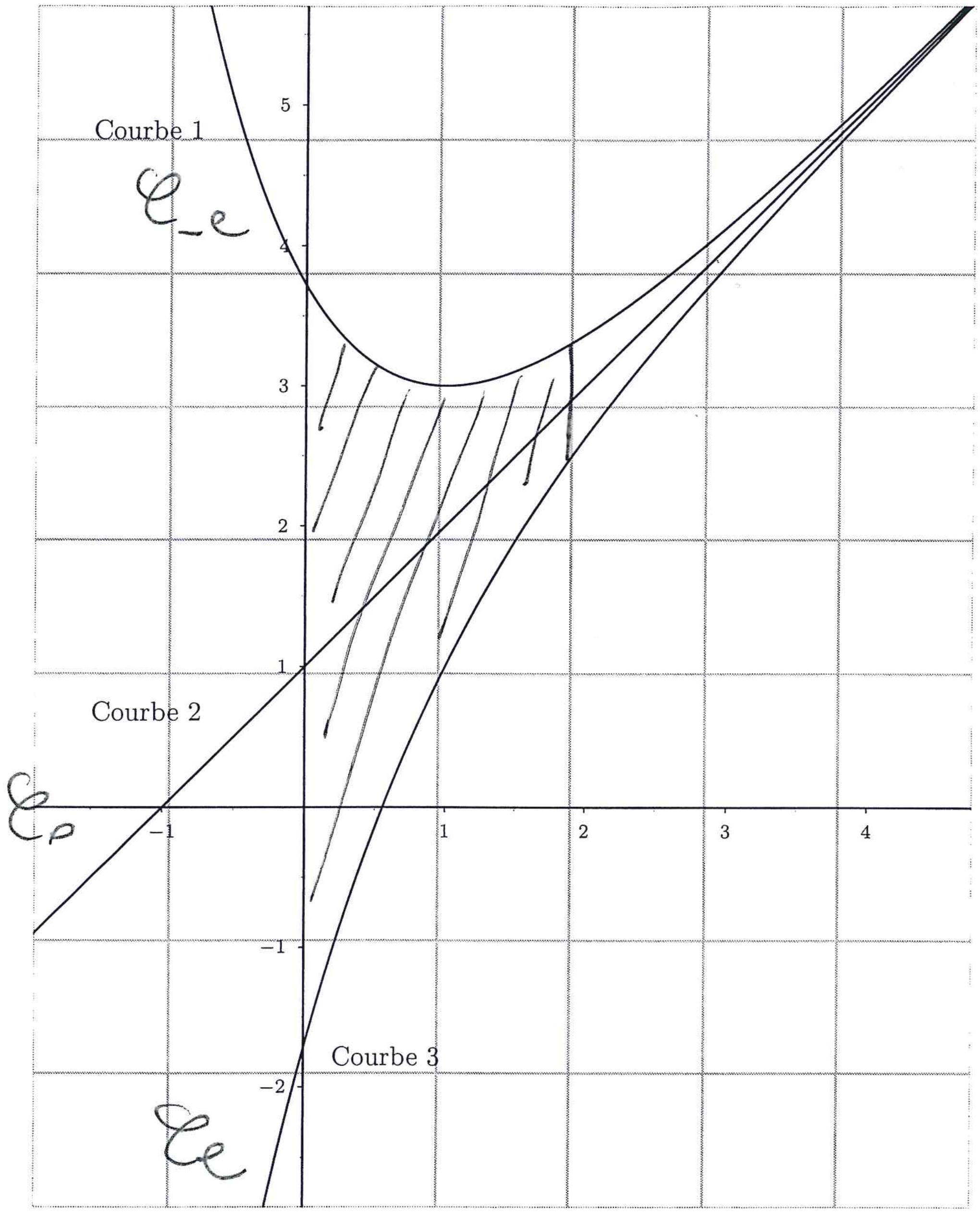
0,75 $\quad = -2e^{1-a} + 2e = 2e - 2e^{1-a}$ $\quad (u\text{-}a)$

$\lim\limits_{a \to +\infty} (1-a) = -\infty$

$X = 1-a \quad \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

Par composée et produit $\lim\limits_{a \to +\infty} -2e^{1-a} = 0$

0,75 <u>Par</u> Somme $\boxed{\lim\limits_{a \to +\infty} \mathcal{A}(a) = 2e}$



Courbe 1
$\mathcal{C}_{-e}$
Courbe 2
$\mathcal{C}_0$
Courbe 3
$\mathcal{C}_e$