# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

28 février 2017

# MATHÉMATIQUES



Série S

**Durée de l'épreuve : 4 heures**
**Coefficient : 7**

*Ce sujet comporte 10 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 10*

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

## Exercice 1 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans $R$ l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ que l'on admet.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | | | | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | | $\nearrow$ | | |

3. Montrer que, pour tout réel $x$ appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables | $N$ et $A$ des entiers naturels ; |
| Entrée | Saisir la valeur de $A$ |
| Traitement | $N$ prend la valeur 0<br>Tant que $N - \ln\left(N^2 + 1\right) < A$<br>    $N$ prend la valeur $N + 1$<br>Fin tant que |
| Sortie | Afficher $N$ |

   a) Que fait cet algorithme ?

   b) Déterminer la valeur $N$ fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour $A$ est 100.

**Partie B**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ appartient à $[0\,;\,1]$.
2. Étudier les variations de la suite $(u_n)$.
3. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente.
4. On note $\ell$ sa limite, et on admet que $\ell$ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
   En déduire la valeur de $\ell$.

## Exercice 2 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

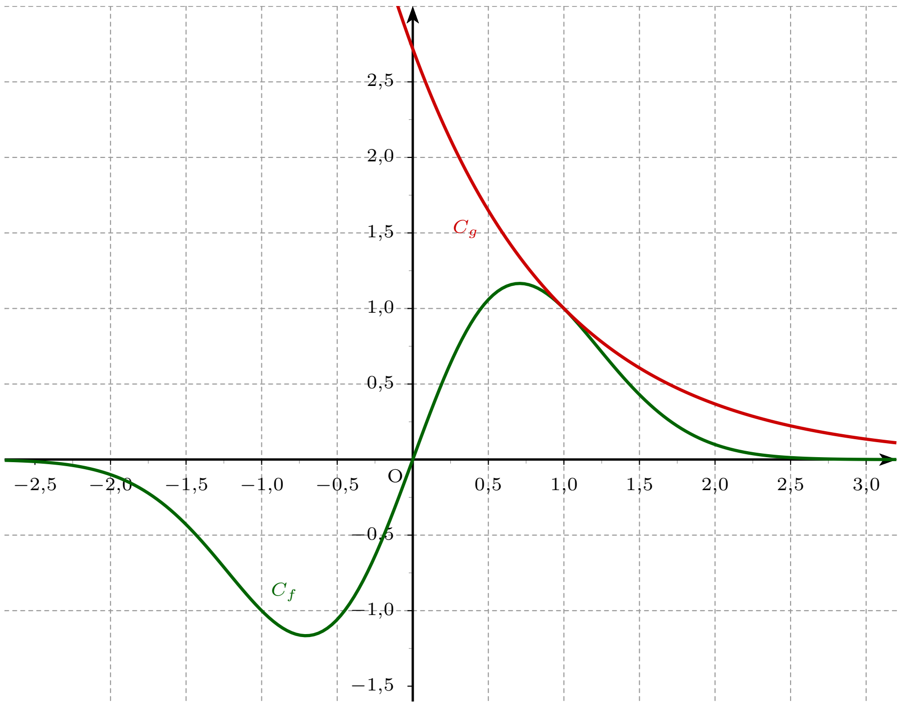
**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   *Indication : on pourra utiliser que pour tout réel $x$ différent de* $0$, $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.
   On admettra que la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ est égale à 0.
2. a) On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f'$ sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel $x$,
   $$f'(x) = \left(1 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$
   b) En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.

**Partie B**

On considère la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions $f$ et $g$.




Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel $x$ appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On pose, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
   a) Montrer que, pour tout réel $x$ strictement positif,
   $$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$
   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.
   b) On admet que la fonction $\Phi$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction $\Phi$. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
   c) En déduire que, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.
4. a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
   b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté $A$.
   c) Montrer qu'en ce point $A$, ces deux courbes ont la même tangente.

## Exercice 3 **5 points**

**Commun à tous les candidats**

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel $n$, on définit les points $(A_n)$ par leurs coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x_0 & = & -3 \\ y_0 & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 0{,}8x_n - 0{,}6y_n \\ y_{n+1} & = & 0{,}6x_n + 0{,}8y_n \end{array}\right.$$

1. a) Déterminer les coordonnées des points $A_0$, $A_1$ et $A_2$.

   b) Pour construire les points $A_n$ ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

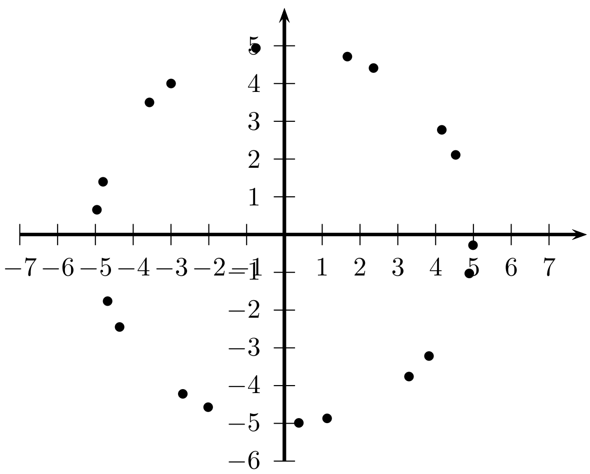
```
Variables :
i,x,y,t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
        Construire le point de coordonnées (x ; y)
        t prend la valeur x
        x prend la valeur ....
        y prend la valeur ....
Fin Pour
```

   Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points $A_0$ à $A_{20}$.

   c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



   Identifier les points $A_0$, $A_1$ et $A_2$.
   On les nommera sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
   Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points $A_n$ pour tout $n$ entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points $A_n$ pour tout $n$ entier naturel.
   Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel $n$, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point $A_n$.

   a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

   b) On admet qu'il existe un réel $\theta$ tel que $\cos(\theta) = 0{,}8$ et $\sin(\theta) = 0{,}6$.
   Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_n = z_{n+1}$.

   c) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}z_0$.

   d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe $z_0$.

   e) Pour tout entier naturel $n$, déterminer, en fonction de $n$ et $\theta$, un argument du nombre complexe $z_n$.
   Représenter $\theta$ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie).**
   Expliquer, pour tout entier naturel $n$, comment construire le point $A_{n+1}$ à partir du point $A_n$.

## Exercice 4 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier naturel $n$, on note $A_n$ le point d'affixe $z_n$ défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n.$$

On définit la suite $(r_n)$ par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel $n$.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.
2. a) Montrer que la suite $(r_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) En déduire l'expression de $r_n$ en fonction de $n$.
   c) Que dire de la longueur $\mathrm{O}A_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?
3. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables | $n$ entier naturel<br>$R$ réel<br>$P$ réel strictement positif |
| Entrée | Demander la valeur de $P$ |
| Traitement | $R$ prend la valeur 1<br>$n$ prend la valeur 0<br>Tant que $R > P$<br>    $n$ prend la valeur $n+1$<br>    $R$ prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$<br>Fin tant que |
| Sortie | Afficher $n$ |

   a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0{,}5$ ?
   b) Pour $P = 0{,}01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?
4. a) Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en $A_{n+1}$.
   b) On admet que $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.
   Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $A_n$ est un point de l'axe des ordonnées.
   c) Compléter la figure donnée en annexe 3, à rendre avec la copie, en représentant les points $A_6$,$A_7$,$A_8$ et $A_9$.
   Les traits de construction seront apparents.

# Exercice 5 **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

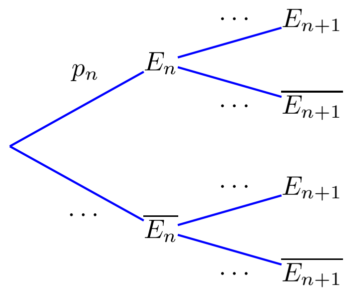
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine $n$ le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine $n$ le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, par $E_n$ l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la $n$-ième semaine ». On note $p_n$ la probabilité de l'évènement $E_n$.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a) Déterminer la valeur de $p_3$ à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous




   b) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$.

   c) Montrer que la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison $r$.
   En déduire l'expression de $u_n$ puis de $p_n$ en fonction de $n$ et $r$.

   d) En déduire la limite de la suite $(p_n)$.

   e) On admet dans cette question que la suite $(p_n)$ est croissante. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Variables | K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel |
| Initialisation | P prend la valeur 0 |
| | J prend la valeur 1 |
| Entrée | Saisir la valeur de K |
| Traitement | Tant que P $< 0{,}05 - 10^{-\text{K}}$ |
| | P prend la valeur $0{,}2 \times$ P $+ 0{,}04$ |
| | J prend la valeur J $+1$ |
| | Fin tant que |
| Sortie | Afficher J |

   À quoi correspond l'affichage final J ?
   Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0{,}05$.
   On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
   On désigne par $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.
   Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Calculer l'espérance mathématique $\mu$ et l'écart type $\sigma$ de la variable aléatoire $X$.

## Exercice 6 **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
*Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à $10^{-3}$ près.*

**Partie A** *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*
Le joueur règle le lance-balle, de façon à ce qu'il envoie au hasard la balle à droite avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ ou à gauche avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$.

1. Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.
   a) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
   b) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?
2. Quel est le nombre minimal de balles que doit lancer le lance-balle, pour que le joueur reçoive toutes les balles à droite avec une probabilité inférieure ou égale à 0,001.

**Partie B**

Le joueur change le réglage afin que la probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite soit égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche. Pour augmenter la difficulté, le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elle peuvent être soit "liftées" soit "coupées".équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ».

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

## Exercice 7 — 3 points

**Commun à tous les candidats**

Pour chaque réel $a$, on considère la fonction $f_a$ définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^{a}.$$

1. Montrer que pour tour réel $a$, la fonction $f_a$ possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de $a$ pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

## Exercice 8 — 3 points

**Commun à tous les candidats**

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

**Proposition 1**

L'ensemble des points du plan d'affixe $z$ tels que $|z-4| = |z+2\mathrm{i}|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe $3\mathrm{i}$.

**Proposition 2**

Soit $(E)$ l'équation $(z-1)\left(z^2 - 8z + 25\right) = 0$ où $z$ appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E)$ sont les sommets d'un triangle rectangle.

**Proposition 3**

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8$.

## Exercice 9 — 3 points

**Commun à tous les candidats**

La suite $(u_n)$ est définie par :

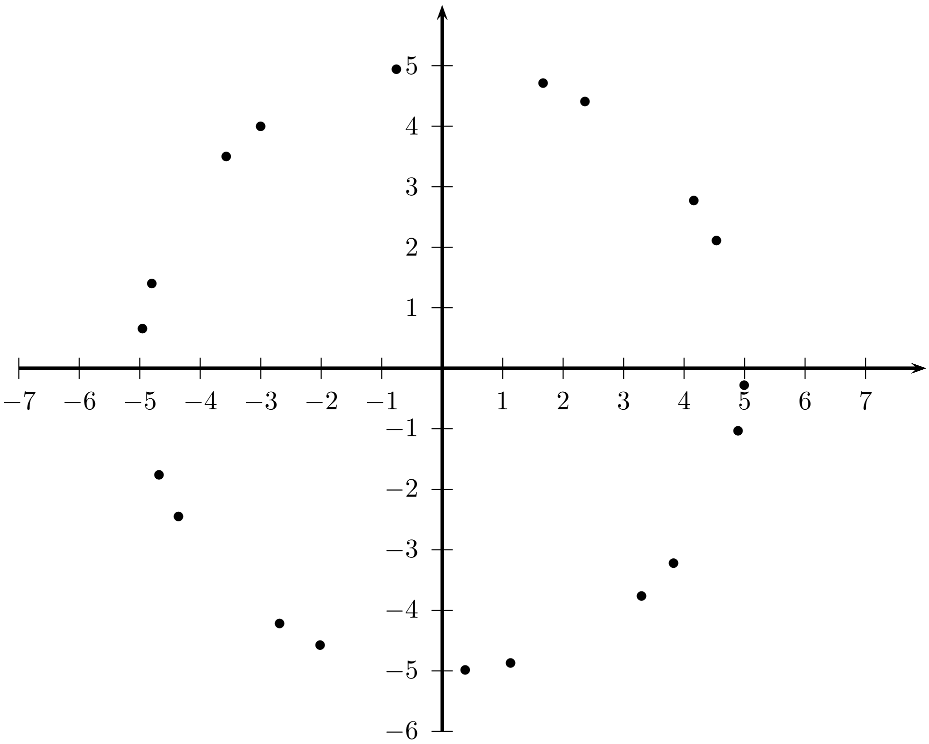
$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}.$$

1. a) À l'aide du calcul des premiers termes de la suite $(u_n)$, conjecturer la forme explicite de $u_n$ en fonction de $n$. Démontrer cette conjecture.
   b) En déduire la valeur de la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$.
2. Compléter, dans l'annexe 3, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier $n$ tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$.

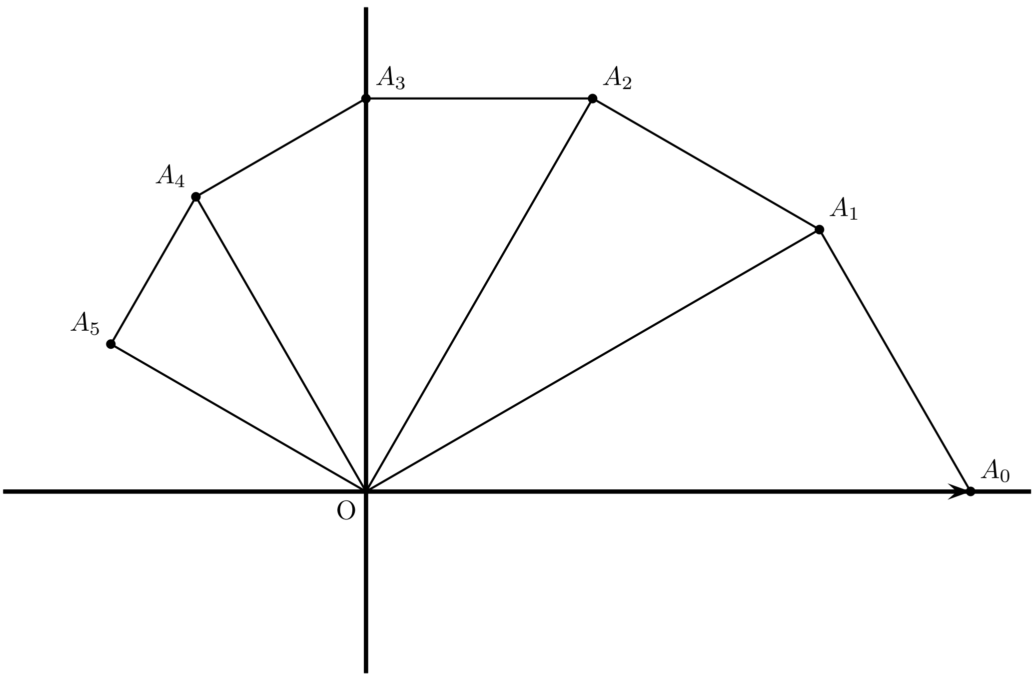
A RENDRE AVEC LA COPIE

NOM : ............................ PRENOM : .............................. Classe : .........

**ANNEXE 1 de l'exercice 3**




**ANNEXE 2 de l'exercice 4**




**ANNEXE 3 de l'exercice 6**

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $n$,$a$ et $b$ sont des nombres. |
| **Initialisation :** | $n$ prend la valeur 0 |
| | $a$ prend la valeur 0 |
| | $b$ prend la valeur 0,5. |
| **Traitement :** | Tant que $\|b-a\|$ ....... |
| | $n$ prend la valeur ....... |
| | $a$ prend la valeur ....... |
| | $b$ prend la valeur ....... |
| | Fin Tant que. |
| **Sortie :** | Afficher ....... |