BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

28 février 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 5

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Partie A *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*
Le joueur règle le lance-balle, de façon à ce qu'il envoie au hasard la balle à droite avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$ ou à gauche avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$.

1. Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.
   a) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
   b) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?
2. Quel est le nombre minimal de balles que doit lancer le lance-balle, pour que le joueur reçoive toutes les balles à droite avec une probabilité inférieure ou égale à 0,001.

Partie B

Le joueur change le réglage afin que la probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite soit égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ».

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Exercice 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

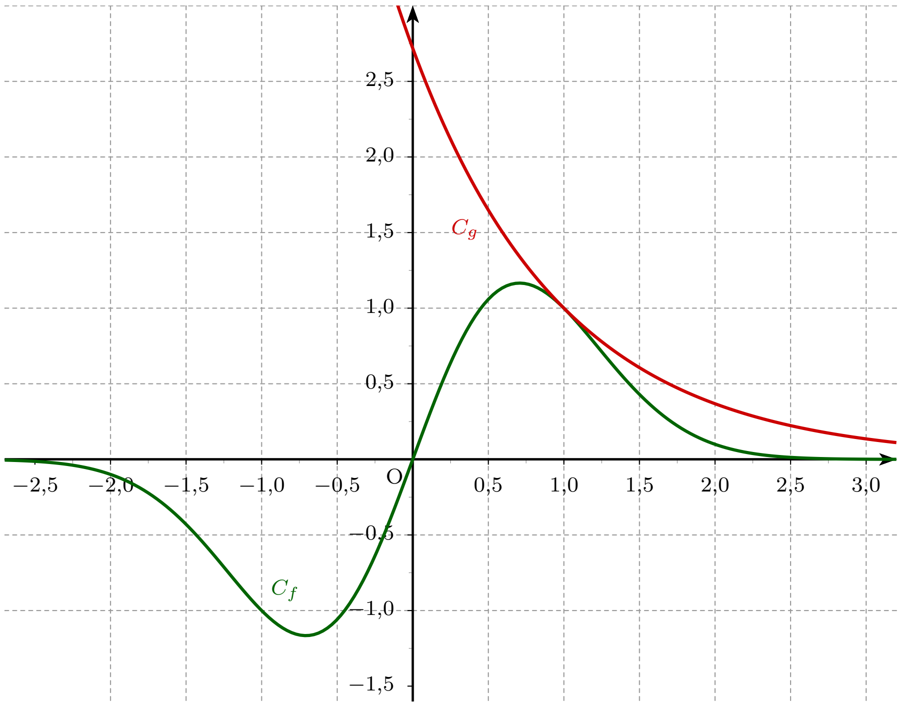
   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(1 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

   b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
   a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$

   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

   b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

   c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.
4. a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
   b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.
   c) Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v})$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1+\text{i})^{4n} = (-4)^n$.

2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$, sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1 + \text{e}^{2i\alpha} = 2\text{e}^{\text{i}\alpha}\cos(\alpha)$.

4. Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\text{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\text{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4 (c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n-1 = 4k$), alors les points O, A et M_n sont alignés.

5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Proposition : $1 + \text{j} + \text{j}^2 = 0$.

Exercice 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln\left(N^2 + 1\right) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

   a) Que fait cet algorithme ?

   b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
   En déduire la valeur de ℓ.