Correction du devoir n°8 TS

Ex1 : /1

$$a = 2e^{-i\pi/6} - 3e^{3i\pi/2}$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) - 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) - 3 \times i \times (-1)$$
$$= \sqrt{3} - i + 3i = \sqrt{3} + 2i$$

0,5

$$b = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = e^{i\pi} \times 3 \times e^{i\pi/6}$$
$$= 3e^{7i\pi/6} = 3e^{-5i\pi/6}$$

0,5

Ex2 : /3

1) $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$ 0,5

$$z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \qquad |z_2|^2 = \frac{6+2}{4} = 2 \Rightarrow |z_2| = \sqrt{2}$$

et $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/6}$ 0,5

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}\, e^{-i\pi/6}} = e^{-i\pi/4 + i\pi/6} = e^{-i\pi/12}$$

0,5

2) or $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}} = 2\,\frac{(1-i)(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}$ 0,75

$$= 2 \times \left(\frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2} - i\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)$$

Par identification
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} \\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$$

0,75

donc $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

Ex3 : (E_1) : $i\bar{z}+3z=2-2i$ Soit $z=a+ib$ $a, b \in \mathbb{R}$

1/2,5

$\Leftrightarrow i(a-ib)+3(a+ib)=2-2i$

$\Leftrightarrow ia+b+3a+3ib=2-2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=2 & (L_1) \\ a+3b=-2 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2-3a \\ 8a=8 \end{cases}$ $3L_1-L_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ $\boxed{S=\{1-i\}}$ 1,5

(E_2) : $3z^2-2z=-1 \Leftrightarrow 3z^2-2z+1=0$ $\Delta=-8=8i^2$

$z_1=\dfrac{2+2\sqrt{2}i}{6}=\dfrac{1+i\sqrt{2}}{3}$ et $z_2=\dfrac{1-i\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{S=\{z_1 ; z_2\}}$ 1

Ex4 : • Soit $A(-3-i)$ $M(z) \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow AM=2$

1/4

$\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre A de rayon 2 1

• Soit $B(-2+i)$ et soit $C(+4i)$

$M(z) \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow BM=CM$

$\mathcal{E}_2$ est la médiatrice de $[BC]$ 1

• $M(z) \in \mathcal{E}_3 \Leftrightarrow M \neq B$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{6}\ (\pi)$

$\mathcal{E}_3$ est la droite passant par B (B exclu) de vecteur directeur $\vec{d}$ tel que $(\vec{u}, \vec{d})=\pi/6\ (\pi)$. 1

• Soit $D(1-2i)$

$M \in \mathcal{E}_4 \Leftrightarrow M \neq A$ et $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AM})=\pi/2\ (2\pi)$
$M \neq D$

$\mathcal{E}_4$ est le demi-cercle de diamètre $[AD]$ A et D exclus (au-dessous de $[AD]$) 1

Devoir n°8 - Nombres Complexes - TS

15 février 2016 - 2h

Exercice 1 (1 pt) :

1. Ecrire sous forme algébrique le nombre : $a = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} - 3e^{3i\frac{\pi}{2}}$
2. Déterminer la forme exponentielle du nombre : $b = -3(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$

Exercice 2 (3 pts) : On donne les nombres complexes : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1. Déterminer la forme exponentielle de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$, et en déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice 3 (2,5 pts) : Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble des complexes :

(E_1) : $i\bar{z} + 3z = 2 - 2i$ $\qquad$ (E_2) : $3z^2 - 2z = -1$

Exercice 4 (4 pts) :

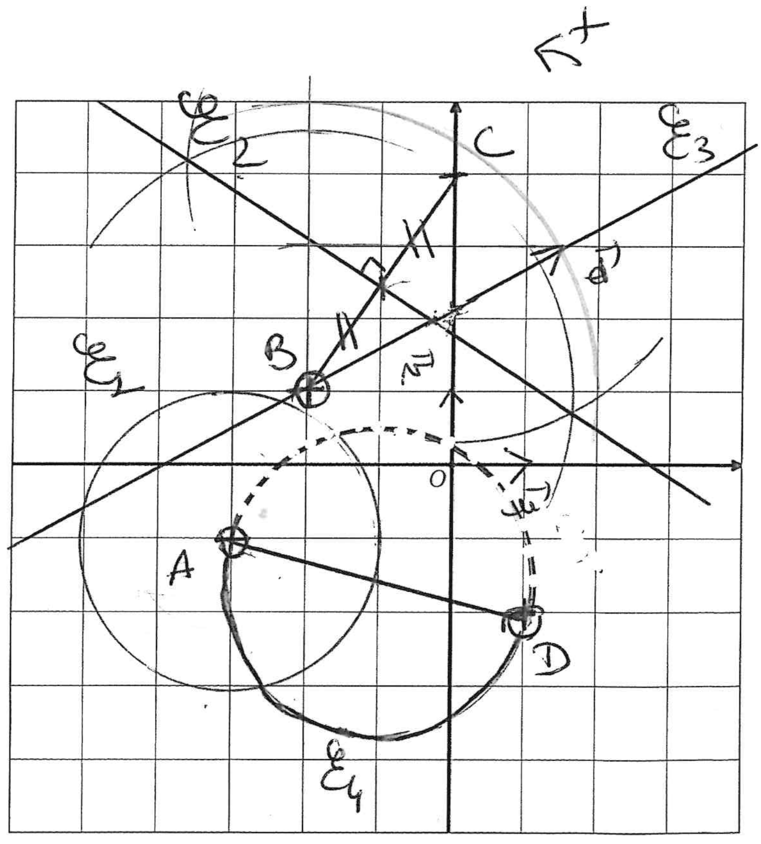
Représenter les ensembles suivants après avoir brièvement justifié :

$\mathscr{E}_1 = \{M(z) \;/\; |z + 3 + i| = 2\}$

$\mathscr{E}_2 = \{M(z) \;/\; |z + 2 - i| = |z - 4i|\}$

$\mathscr{E}_3 = \left\{M(z) \;/\; \arg(z + 2 - i) = \frac{\pi}{6} \;\; (\pi)\right\}$

$\mathscr{E}_4 = \left\{M(z) \;/\; \arg\left(\dfrac{z + 3 + i}{z - 1 + 2i}\right) = \dfrac{\pi}{2} \;\; (2\pi)\right\}$



14,5

Ex5 : 1) $z' = \dfrac{2z}{z-2i}$ $\quad z \neq 2i$ $\quad \begin{cases} z = x+iy \\ z' = x'+iy' \end{cases}$ $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$

$$z' = \frac{2(x+iy)}{(x+iy-2i)} = \frac{2(x+iy)(x-i(y-2))}{(x+i(y-2))(x-i(y-2))}$$

$$= \frac{2(x^2 - ix(y-2) + ixy + y(y-2))}{x^2+(y-2)^2}$$ 1,5

donc $\boxed{x' = \dfrac{2(x^2+y^2-2y)}{x^2+(y-2)^2}}$ et $\boxed{y' = \dfrac{4x}{x^2+(y-2)^2}}$

2) $\mathcal{E} = \{M(z) / z \neq 2i$ et z' réel$\}$

$M \in \mathcal{E} \iff z \neq 2i$ et $y' = 0$

$\iff z \neq 2i$ et $x = 0$ 1

$\mathcal{E}$ est la droite des imaginaires purs privée de $A(2i)$

3) $\mathcal{F} = \{M(z) / z \neq 2i$ et z' imaginaire pur$\}$

$M \in \mathcal{F} \iff z \neq 2i$ et $x' = 0$

$\iff z \neq 2i$ et $x^2+y^2-2y = 0$

$\iff z \neq 2i$ et $x^2+(y-1)^2 = 1$ 1,5

$\mathcal{F}$ est le cercle de centre $I(z_I = i)$ de rayon 1 privé de $A(2i)$

0,5 ($A(2i)$)

Ex6 : Partie A : (E) : $z^4 = -4$ $(z \in \mathbb{C})$ /5

1) soit z solution de (E) alors $z^4 = -4$

or $(-z)^4 = (-1)^4 z^4 = z^4 = -4$ donc $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de (E)

0,75 et $(\overline{z})^4 = \overline{(z^4)} = \overline{-4} = -4$

2) ⓐ $z_0 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ 0,25

ⓑ $(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^4 = (\sqrt{2})^4 (e^{i\pi/4})^4 = 4 \times e^{i\pi} = -4$

donc z_0 est solution de (E) 0,5

ⓒ d'après 1), $-z_0$ est solution, $\overline{z_0}$ est solution et $-\overline{z_0}$ aussi

soient $-1-i$, $1-i$ et $-1+i$ 0,75

Partie B : $z_A = 1+i = z_0$; $z_B = -1+i = -\overline{z_0}$

$z_C = -1-i = -z_0$ et $z_D = 1-i = \overline{z_0}$

1) $z_E = -1+\sqrt{3}$ $(\in \mathbb{R})$

$\begin{cases} BC = |z_C - z_B| = |-2i| = 2 \\ CE = |z_E - z_C| = |\sqrt{3}+i| = 2 \\ BE = |z_E - z_B| = |\sqrt{3}-i| = 2 \end{cases}$

$BC = CE = BE$ donc le triangle BCE est équilatéral

1,75

2) $z_F = -i(1+\sqrt{3})$ (imaginaire pur)

$$\frac{z_E - z_A}{z_F - z_A} = \frac{(\sqrt{3}-2)-i}{-1-i(2+\sqrt{3})} = \frac{(2-\sqrt{3})+i}{1+i(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{((2-\sqrt{3})+i)(1-i(2+\sqrt{3}))}{(1+i(2+\sqrt{3}))(1-i(2+\sqrt{3}))}$$ 1,5

$$= \frac{(2-\sqrt{3})-i(4-3)+i+(2+\sqrt{3})}{1+(2+\sqrt{3})^2} = \frac{4}{1+(2+\sqrt{3})^2}$$

$\frac{z_E - z_A}{z_F - z_A} \in \mathbb{R}$ donc $\arg\left(\frac{z_E - z_A}{z_F - z_A}\right) = 0\ (\pi)$

or $\arg\left(\frac{z_E - z_A}{z_F - z_A}\right) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF})\ (2\pi)$

donc A, E et F alignés (ou avec coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$)

Exercice 5 (4,5 pts) : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit la fonction f qui, à tout point M, d'affixe $z \neq 2\mathrm{i}$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{2z}{z - 2\mathrm{i}}$$

1. On pose $z = x + iy$ avec $x,\ y \in \mathbb{R}$ et $z' = x' + iy'$ avec $x',\ y' \in \mathbb{R}$.
   Vérifier que $x' = \dfrac{2(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (y-2)^2}$ et $y' = \dfrac{4x}{x^2 + (y-2)^2}$.
2. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit un réel ; déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.
3. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit un imaginaire pur ; déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$.

Exercice 6 (5 pts) :

Partie A : On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$, où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si z est solution de (E) alors $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de (E).
2. Soit le nombre complexe $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
   a) Ecrire z_0 sous forme exponentielle.
   b) Vérifier que z_0 est solution de (E).
3. D'après les questions précédentes, en déduire trois autres solutions de l'équation (E).

Partie B : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

$$z_A = 1 + \mathrm{i}, \qquad z_B = -1 + \mathrm{i}, \qquad z_C = -1 - \mathrm{i}, \qquad z_D = 1 - \mathrm{i}.$$

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 + \sqrt{3}$; montrer que le triangle BCE est équilatéral.
2. Soit F le point d'affixe $z_F = -\mathrm{i}(1 + \sqrt{3})$; montrer que les points A, E et F sont alignés.
   (on pourra vérifier que $\dfrac{z_E - z_A}{z_F - z_A}$ *est un réel)*

$\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$(\sqrt{3} - 2)(-2 - \sqrt{3}) - (-1) \times (-1)$

$= -2\sqrt{3} - 3 + 4 + 2\sqrt{3} - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$