Correction du devoir n°7 - TS

16

Ex 1 : $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$

1) ⓐ $f(0) = 1 + 0 = 1$ donc $A(0;1) \in \mathcal{C}$ 0,5

ⓑ $B(-1;3)$ $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2}{-1} = -2$ coefficient directeur de (AB) 0,5

ⓒ $f'(x) = 1 + ae^{-x^2} + ax \times e^{-x^2} \times (-2x)$
$= 1 + a(1 - 2x^2)e^{-x^2}$
$= 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ 0,75

ⓓ (AB) tangente à $\mathcal{C}$ en $A(0;1)$
alors son coefficient directeur est $f'(0)$
or $f'(0) = 1 - a \times (0 - 1) = 1 + a$
donc $1 + a = -2 \iff a = -3$ 0,75

2) $f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$ et $f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

ⓐ $f(x) = 1 + x(1 - 3e^{-x^2})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$
$X = -x^2$ $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

Par produit, somme et composée $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 3e^{-x^2}) = 1$ 1

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ Par Produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

ⓑ $\boxed{-1 < x \leq 0} \Rightarrow 0 < x + 1$
et $3 > -3x \geq 0$; or $e^{-x^2} > 0$
donc $x + 1 > 0$ et $-3xe^{-x^2} > 0$ Par somme $f(x) > 0$ 0,5

ⓒ $\boxed{x \leq -1} \Rightarrow x^2 \geq 1$ car $x \mapsto x^2$ strictement décroissante sur $]-\infty;0]$
$\Rightarrow 2x^2 - 1 \geq 1 > 0$
or $3 > 0$ et $e^{-x^2} > 0$ Par produit et somme
$\boxed{f'(x) > 1 > 0}$ 0,75

d) sur $]-\infty;-1]$ f dérivable donc continue,
f ~~strictement~~ croissante car $f'(x)>0$

1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-1) = 3e^{-1} = \frac{3}{e}$ (>0)

D'après la conséquence du théorème de la valeur intermédiaire l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution c sur $]-\infty;-1]$.

or $f(x)>0$ sur $]-1;0]$ donc c est la seule solution sur $]-\infty;0]$

0,25

Ex2 : (E_1) : $\ln(x+4) + \ln(x+1) = \ln(x+9)$

$x+4>0 \iff x>-4$; $x+1>0 \iff x>-1$; $x+9>0 \iff x>-9$

0,5 donc on travaille sur $I =]-1;+\infty[$

$(E_1) \iff (x+4)(x+1) = (x+9)$

$\iff x^2+5x+4 = x+9$

$\iff x^2+4x-5=0$

1,5 $\iff (x-1)(x+5)=0$

$\iff x=1$ ou $x=-5 \notin I$

0,5 $\boxed{S=\{1\}}$

/4,5

(E_2) : $(\ln x)^2 + \ln x - 12 > 0$ $\quad x>0$ 0,25

$\iff \begin{cases} X = \ln x \in \mathbb{R} \\ X^2+X-12>0 \quad (*) \end{cases}$

0,5

Résolution de $(*)$

$\Delta = 49$ $\quad \sqrt{\Delta} = 7$

$\begin{cases} X_1 = \frac{-1-7}{2} = -4 \\ X_2 = \frac{-1+7}{2} = 3 \end{cases}$

X	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
X^2+X-12 $a=1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,75

du signe de a à l'extérieur des racines

donc $X<-4$ ou $X>3$

soit $\ln x < -4$ ou $\ln x > 3$

$\iff x < e^{-4}$ ou $x > e^3$

$\boxed{S =]0;e^{-4}[\cup]e^3;+\infty[}$

1

Ex 3 : $\boxed{f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}}$ $\quad I =]0;+\infty[$ /10

1) $g(x) = 1 + x - x\ln x$ sur I

ⓐ $\lim\limits_{x\to 0} 1+x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ croissances comparées

Par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1}$ 0,5

$g(x) = 1 + x(1 - \ln x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1 - \ln x) = -\infty$ Par produit et somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$ 0,5

ⓑ g dérivable sur I comme somme et produit

$g'(x) = 1 - \left(1\times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = -\ln x$ 0,5

$x \geqslant 1 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln x \leqslant 0$ 0,5

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	↗	2	↘	$-\infty$

0,5

ⓒ • Sur $]0;1]$, g continue strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ donc $\boxed{g(x) > 0}$ 0,5

• sur $[1;+\infty[$, g continue strictement décroissante avec $g(1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[1;+\infty[$

Au total $g(x) = 0$ admet une seule solution sur I. 1

$\left.\begin{array}{l} g(3{,}59) > 0 \\ g(3{,}60) < 0 \end{array}\right\}$ donc $\boxed{3{,}59 < \alpha < 3{,}60}$ 0,5

ⓓ

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

0,5

2) ⓐ $t = \ln x \iff e^t = x$

alors $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{t}{e^t} = \dfrac{1}{\frac{e^t}{t}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$

Par composition et quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$ 1

ⓑ $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} x + 1 = 1$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$ 0,5

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

0,75 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

Par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale et l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ 0,5

ⓒ f dérivable sur I comme quotient.

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \dfrac{x + 1 - x\ln x}{x(x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{x(x+1)^2}$ 0,5

ⓓ $x > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ sur I

donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$. 0,25

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

0,5

ⓔ $g(\alpha) = 0$

$\iff 1 + \alpha = \alpha \ln \alpha$

$\iff \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\ln \alpha}{1 + \alpha}$

$\iff \boxed{f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}}$ 0,5

ⓕ $f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

$\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $A(1;0)$

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$ tangente à $\mathcal{C}$ en A 0,5