Correction du devoir n°5 - TS

Ex 1 : • $f_1(x) = x + 2\sin x$ en $+\infty$ (/5,5)

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin x \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x - 2 \leq f_1(x) \leq x + 2$ 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty$ et $x - 2 \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

• $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{x+5}{4x+1}}$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+5}{4x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$ fonction rationnelle

$X = \dfrac{x+5}{4x+1} \quad \lim\limits_{X \to 1/4} \sqrt{X} = \dfrac{1}{2}$ 1,5

Par Composition $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 1/2$

La droite d'équation $y = 1/2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_{f_2}$ en $+\infty$

• $f_3(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ en $-\infty$ $\quad \underset{x \neq 0}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2(1 + 1/x^2)}$

$= |x| \sqrt{1 + 1/x^2}$

donc $\underset{x<0}{f_3(x)} = \dfrac{x}{|x|\sqrt{1 + 1/x^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 + 1/x^2}}$ 1,5

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1 \qquad X = 1 + 1/x^2$ et $\lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1$

Par Composition et quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = -1$

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_{f_3}$ en $-\infty$

• $f_4(x) = 2x \sin\left(\dfrac{-1}{x}\right)$ en $+\infty$

$\underset{x \neq 0}{=} 2x \dfrac{\sin(-1/x)}{(-1/x)} \times (-1/x) = -2 \dfrac{\sin(-1/x)}{(-1/x)}$ 1,5

$\lim\limits_{x \to -\infty} -1/x = 0 \qquad X = -1/x$ et $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$

Par Composition et produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = -2$

La droite d'équation $y = -2$ ~~est asymptote~~ horizontale à $\mathcal{C}_{f_4}$ en $+\infty$

Ex2 : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & x \neq -1 \\ m & x = -1 \end{cases}$

12

sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ f continue comme quotient de fonctions continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ car $x+1 \neq 0$ 0,5

en -1, $x \neq -1$: $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(x-1) = -2$ or $f(-1) = m$ 1

Pour que f soit continue il faut que $m = -2$ 0,5

alors f continue en -1 et donc sur $\mathbb{R}$

Ex3 : 1) $f(x) = x\sqrt{x-1}$ définie sur $[1;+\infty[$

dérivable sur $]1;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $]1;+\infty[$ 0,5

en 1, $x > 1$: $T(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x\sqrt{x-1}-0}{x-1} = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$

$X = x-1$ et $\lim\limits_{X\to 0}\sqrt{X} = 0^+$

Par composition et quotient $\lim\limits_{x\to 1} T(x) = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 1. 1,25

2) $g(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$ définie sur $[1;+\infty[$

dérivable sur $]1;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $]1;+\infty[$ 0,25

en 1 : $x > 1$: $T(x) = \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}-0}{x-1} = \sqrt{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = 0$ (vu précédemment) 1

donc g est dérivable en $x=1$ et $g'(1) = 0$

g dérivable sur $[1;+\infty[$

Ex 4 : A $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynome) 0,25

1) $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2-1) = 3(2x-1)(2x+1)$ 0,25

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘	-9	↗	$+\infty$

$a = 12$
du signe de a à l'extérieur des racines

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$ 0,5

1

2) • Sur $]-\infty ; 1/2]$, g admet pour maximum -7 atteint en $x = -1/2$ donc $g(x) < 0$
et $g(x) = 0$ n'admet pas de solution 0,5

• sur $[1/2 ; +\infty[$, g continue, strictement croissante avec $g(1/2) = -9$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

D'après le théorème de la valeur intermédiaire l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[1/2 ; +\infty[$ 1

Au Total une seule solution α sur $\mathbb{R}$

$g(1,45) < 0$
$g(1,46) > 0$ | donc $\boxed{1,45 < \alpha < 1,46}$ 0,5

3) on a

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	

0,5

B a) f fonction rationnelle $\boxed{f(x) = \dfrac{x^3+1}{4x^2-1}}$ 0,25

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{4x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ 0,5

b)

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$4x^2-1$		+	0	−	0	+	

$\lim\limits_{x \to 1/2} x^3 + 1 = 9/8$

$\lim\limits_{x \to 1/2^+} (4x^2 - 1) = 0^+$

0,5

Par Quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to 1/2} f(x) = +\infty}$ 0,5

La droite d'équation $x = 1/2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ 0,25

2) ⓐ f définie dérivable sur $[1/2 ; +\infty[$
comme quotient de fonctions dérivables
car $4x^2-1 \neq 0$ 0,25

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2-1) - (x^3+1)\times 8x}{(4x^2-1)^2} = \frac{12x^4 - 3x^2 - 8x^4 - 8x}{(4x^2-1)^2}$$

$$= \frac{4x^4 - 3x^2 - 8x}{(4x^2-1)^2} = \frac{x\,g(x)}{(4x^2-1)^2}$$ 0,5

ⓑ $(4x^2-1)^2 > 0$ et $x > 0$ sur $[1/2 ; +\infty[$
donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ 0,25

x	$1/2$		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

0,5

3) On sait que $g(\alpha)=0 \iff 4\alpha^3 = 3\alpha + 8$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1} = \frac{\alpha}{\alpha}\times\frac{\alpha^3+1}{4\alpha^2-1} = \frac{\alpha\left(\frac{3\alpha}{4}+2+1\right)}{4\alpha^3-\alpha}$$

$$= \alpha\left(\frac{3\alpha+12}{4}\right)\times\frac{1}{3\alpha+8-\alpha} = \frac{3\alpha}{4}\times\left(\frac{\alpha+4}{2\alpha+8}\right)$$

$$= \frac{3\alpha}{4}\times\frac{(\alpha+4)}{2(\alpha+4)} = \frac{3}{8}\alpha$$ 0,75

$1,45 < \alpha < 1,46 \Rightarrow \boxed{0,54375 < f(\alpha) < 0,5475}$

soit $0,54 < f(\alpha) < 0,55$

4) $\mathcal{D} : y = \frac{1}{4}x$

ⓐ d'après la calculatrice, il semble que $\mathcal{C}_f$ soit au-dessus de $\mathcal{D}$. 0,25

ⓑ $M(x ; f(x)) \in \mathcal{C}_f$ et $N(x ; \frac{1}{4}x) \in \mathcal{D}$ 0,25
Il semble que MN tende vers 0 quand $x \to +\infty$

ⓒ $$f(x) - \frac{1}{4}x = \frac{x^3+1}{4x^2-1} - \frac{x}{4} = \frac{4x^3+4-(4x^2-1)x}{4(4x^2-1)}$$ 0,75

$$= \frac{x+4}{4(4x^2-1)}$$ $x+4>0$; $4>0$ et $4x^2-1>0$ sur $[1/2 ; +\infty[$

donc $f(x) - \frac{1}{4}x > 0$ $\mathcal{C}_f$ est <u>toujours</u> au-dessus de $\mathcal{D}$ <u>sur $[1/2 ; +\infty[$</u>

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \frac{1}{4}x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+4}{4(4x^2-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{16x^2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{16x} = 0$ 0,5

0,5

Donc C_f se « rapproche » de D quand $x \to +\infty$
On dit que D est asymptote oblique à C_f en $+\infty$